Dr. Szász Domokos
Valószínűségszámítás 2. 2009-10 tavaszi félév
3. feladatsor
Momentum generáló függvények, generátorfüggvény, karakterisztikus függvény

3.1. Számoljuk ki a következő eloszlások momentum generáló függvényét, karakterisztikus függvényét, generátorfüggvényét, és ezek segítségével a várható értékét: $\mathrm{BIN}(n,p), \mathrm{POI}(\lambda), \mathrm{GEO}(p)$, $\mathrm{NBIO}(r,p), \mathrm{DE}[0,n]$. (Itt $\mathrm{NBIO}(r,p)$ jelöli a negatív binomiális, $\mathrm{DE}[0,n]$ a $\{0,\ldots,n\}$ számokon adott diszkrét egyenletes eloszlást.)

3.2. Legyen X egy $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változó. Jelöljük eloszlásának generátorfüggvényét $P(z)$-vel. Írjuk fel az $Y := X+1$ és a $Z := 2X$ valószínűségi változók eloszlásának generátorfüggvényét. Határozzuk meg az $a_n := \mathbf{P}(X \le n), b_n := \mathbf{P}(X < n), c_n := \mathbf{P}(X \ge n), d_n := \mathbf{P}(X > n+1), e_n := \mathbf{P}(X = 2n)$ sorozatok generátorfüggvényeit! (Vigyázat: ezek nem valószínűségeloszlások.)

3.3. Határozzuk meg a p paraméterű geometriai eloszlás generátorfüggvényét feltételes rekurzió és az örökifjú tulajdonság felhasználásával!

3.4. Határozza meg a következő eloszlások momentum generáló függvényét, karakterisztikus függvényét, és ezek segítségével a várható értékét: $\mathrm{E}[a,b], \mathrm{EXP}(\lambda), \mathrm{GAMMA}(s,\lambda), \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$.

3.5. Valószínűségeloszlások generátorfüggvényei-e az alábbi függvények?

$$\text{(a)}\quad \exp\left(\frac{z-1}{\lambda}\right), \quad \lambda>0; \qquad \text{(b)}\quad \frac{(z+1)^6}{64}; \qquad \text{(c)}\quad \frac{2}{2-z}; \qquad \text{(d)}\quad \frac{2}{1+z}.$$

3.6. Legyen X csonkított Poisson-eloszlású valószínűségi változó:

$$\mathbf{P}(x=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \qquad (k=1,2,\ldots)$$

Határozzuk meg X generátorfüggvényét, $\mathbf{E}(X)$-et, $\mathbf{D}(X)$-et.

3.7. Legyen X_1 és X_2 független $\mathrm{GEO}(p_1)$ illetve $\mathrm{GEO}(p_2)$ eloszlású valószínűségi változó. Meghatározandó $Y = \min\{X_1, X_2\}$ generátorfüggvénye.

3.8. Legyen X_1 és X_2 független $\mathrm{EXP}(\lambda_1)$ illetve $\mathrm{EXP}(\lambda_2)$ eloszlású valószínűségi változó. Meghatározandó $Y = \min\{X_1, X_2\}$ momentum generáló függvénye.

3.9. *Véletlen tagszámú összegek*

(a) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású $\mathbb{Z}^+$-értékű valószínűségi változók, továbbá ν tőlük független, ugyancsak $\mathbb{Z}^+$-értékű valószínűségi változó. Meghatározandó S_ν generátorfüggvénye, ahol

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad (n \ge 0).$$

(b) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, továbbá ν tőlük független, $\mathbb{Z}^+$-értékű valószínűségi változó. Meghatározandó S_ν karakterisztikus függvénye és momentum generáló függvénye, ahol

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad (n \ge 0).$$

3.10. *Korlátlanul osztható eloszlások*

(a) Egy X valószínűségi változó eloszlása korlátlanul osztható, ha $\forall n \in$ N-re van olyan $Y_1^n, \ldots, Y_n^n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változó n-es, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^n \sim X$$

Korlátlanul osztható-e Poisson, a binomiális és a geometriai eloszlás?

(b) Mutassuk meg, hogy ha $X_1, X_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású $\mathbb{Z}^+$-értékű valószínűségi változók, és $\nu \sim POI(\lambda)$, akkor $Y = \Sigma_{i=1}^{\nu} X_i$ korlátlanul osztható.

(c) Lássa be, hogy minden $0 < p < 1$-hez megadható olyan $p_1, p_2, \ldots$ valószínűségi eloszlás és $\lambda > 0$, hogy $\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim GEO(p)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ f.a.e. és $k \geq 1$-re $\mathbf{P}(X_i = k) = p_k$, valamint ν tőlük független és $POI(\lambda)$ eloszlású. Mutassa meg ennek segítségével, hogy a geometriai eloszlás korlátlanul osztható. (Itt Z $GEO(p)$ eloszlású, ha $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ $\mathbf{P}(Z = n) = p(1-p)^n$.)

3.I. Egy kockával addig dobunk, amíg először sikerül kétszer egymás után hatost dobnunk. Jelölje ν a dobások számát. Számítsuk ki ν eloszlásának generátorfüggvényét és ennek segítségével ν várható értékét és szórásnégyzetét.

3.II. Jelölje a_n azon, tetszőleges hosszúságú kockadobás-sorozatok számát, ahol a dobott pontok összege n. Mutassuk meg, hogy az $\{a_n\}$ sorozat generátorfüggvénye $[1 - z - z^2 - \ldots - z^6]^{-1}$.

A következő játékot játsszuk a félig végtelen táblán (a mezőket a nemnegatív egész számokkal számozzuk). 0-ból indulva minden lépésben kockával dobunk és annyit lépünk jobbra, amennyit dobtunk. Jelölje b_n annak valószínűséggét hogy valamikor az n mezőre lépünk. Határozzuk meg a b_n sorozat generátorfüggvény-ét. Mi e számok határértéke? (A válasz nem 1/6!)

3.III. Legyen Y eloszlása E$(0, 1)$, és tegyük fel, hogy az $Y = p$ feltétel mellett az X valószínűségi változó eloszlása BIN(n, p). Mutassa meg, hogy X eloszlása DE$[0, n]$.

3.IV. Jelöljék A, B, C egy szabályos háromszög csúcsait! Egyszerű szimmetrikus bolyongást kezdünk a gráfon az A szögpontból. Annak valószínűségeit, hogy n lépés után az A, B, ill. C szögpontokban vagyunk rendre a_n, b_n és c_n-nel jelöljük. Számoljuk ki ezen sorozatok gfeit és mutassuk meg, hogy mindegyik sorozat 1/3-hoz tart!

3.V. Legyen Y egyszerű valószínűségi változó, momentum generáló függvénye $M(t)$. Mutassa meg, hogy $P(Y > 0) = 0$-ból következik, hogy $P(Y \geq 0) = \inf_t M(t)$. Eléretik az infimum ebben az esetben?

3.VI. $M(t)$ jelöli az X valószínűségi változómomentum generáló függvényét. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}(X > x) \leq \inf_{t>0} M(t)e^{-tx}.$$

Ezt használva adjunk becslést a következőre: $\mathbf{P}(POI(\lambda) > x)$!

3.A. Szabályos érmével dobunk. Jelölje q_n annak a valószínűségét, hogy az első n dobás során nem fordul elő három egymásutáni fej-dobás. Írjuk föl a q_n sorozat generátorfüggvényét.