Dr. Szász Domokos
Valószínűségszámítás 2. 2009/10 tavaszi félév
4. feladatsor
Generátorfüggvények alkalmazásai: Bolyongások és elágazó folyamatok

4.1. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) := \mathbf{P}\big(X_i < x\big)$. Legyen ν ezektől független, $\mathbb{Z}_+$-értékű valószínűségi változó; jelöljük $G(z)$-vel ν eloszlásának generátorfüggvényét. Mutassuk meg, hogy az $Y := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_\nu\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = G(F(x))$.

4.2. Annak a valószínűsége, hogy a Pistikéék veteményeskertjében n cserebogárpajor van, g_n. A g_n sorozat generátorfüggvénye legyen $P(z)$. Kapáláskor Pistike a pajorokat egymástól függetlenül egyenként p valószínűséggel vágja ketté. Mi a kertben maradt cserebogárpajorok számának generátorfüggvénye, várható értéke és szórása?

4.3. Legyen $X_0 = 1, X_1, X_2, \ldots$ Galton–Watson folyamat, $\mathbf{E}(X_1) = \mu$, $\mathbf{D}^2(X_1) = \sigma^2$. Mutassuk meg, hogy

(a)
$$\mathbf{D}^2(X_{n+1}) = \mu\mathbf{D}^2(X_n) + \mu^{2n}\sigma^2$$

(b)
$$\mathbf{D}^2(X_n) = \sigma^2\mu^{n-1}\frac{1-\mu^n}{1-\mu}$$

4.4. (Folytatás). Mutassuk meg, hogy $n > m$ esetén $\mathbf{E}(X_n X_m) = \mu^{n-m}\mathbf{E}X_m^2$.

4.5. Mekkora a valószínűséggel éri meg az n-edik generációt az az elágazó folyamat, amelyben az utódok eloszlása pesszimista $GEO(\frac{1}{2})$?

4.6. Tekintsünk egy olyan elágazó folyanatot, amelyben az utódok eloszlásának generátorfüggvénye $P(z)$. Jelölje X a teljes populáció nagyságát, vagyis a keletkező véletlen fa csúcsainak a számát. Legyen $Q(z) = \mathbf{E}(z^X)$. Bizonyítsa be, hogy $Q(z)$ megyezik a $\frac{z}{P(z)}$ függvény inverzfüggvényével!

4.7. Legyen $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$ egyszerű szimmetrikus bolyongás $\mathbb{Z}$-n, azaz $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlásúak, és $\mathbf{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Legyen továbbá $u_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $f_n = \mathbf{P}(S_1, \ldots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_0 = 0$, valamint a megfelelő generátorfüggvények legyenek $U(z)$ és $F(z)$.

(a) Mutassuk meg, hogy $U(z) = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

(b) Igazoljuk, hogy
$$U(z) = \frac{1}{1 - F(z)}$$
(Segítség: vegyük észre, hogy $n \geq 1$ -re $u_n = f_1 u_{n-1} + f_2 u_{n-2} + \ldots f_n u_0$. Miért igaz ez utóbbi?)

4.8. (Folytatás).

(a) S_n egyszerű szimmetrikus bolyongás $\mathbb{Z}$-n ($S_0 = 0$) és τ az 1 első elérésének ideje, azaz $\tau = \min\{n | S_n = 1\}$. Határozzuk meg τ pontos aszimptotikáját:

$$\limsup_{k\to\infty} k^{\frac{3}{2}} \mathbf{P}(\tau = k) =?$$

Segítség: fejtsük sorba τ generátorfüggvényét, határozzuk meg $P(\tau = 2k)$-t és használjuk a Stirling-formulát.

(b) $X_1, X_2, \ldots$ elágazó folyamat $GEO(1/2)$ utód eloszlással. A teljes populáció mérete Y, (és $\mathbb{E}z^Y = Q(z)$).

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{3}{2}} \mathbf{P}(Y = k) =?$$

Hogyan tudjuk ezt belátni minden számolás nélkül, pusztán az előző feladatot használva? *Segítség:* próbáljunk mélységi keresést és használjunk valószínűségi interpretációt!)

(c) Egy amőba két dolgot tud csinálni minden nap minden mástól függetlenül (más amőbáktól és napoktól): vagy kettéhasad vagy elhal $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel. Jelölje a csúcsok teljes számaát az elágazó folyamat utód-fájában Y. Mutassuk meg generátorfüggvényhasználatával, hogy $Y \sim \tau$ (azaz 1 első elérésének ideje a bolyongásban). Adjuk valószínűségi interpretációját a kapott azonosságnak. (*Segítség:* próbáljunk mélységi keresést)

4.9. Adott az X valószínűségi változó $P(z)$ generátorfüggvénye. Számoljuk ki az $\mathbf{E}(X^3)$ és $\mathbf{E}(X^4)$ momentumokat. Alkalmazzuk a kapott eredményt, ha X POI(λ) eloszlású.

4.10. Hamis kockával n-szer dobva legyen X és Y az összes 1-es illetve 6-os dobások száma. Határozzuk meg a $H(z, w) = \mathbf{E}(z^X w^Y)$ együttes generátorfüggvényt.

4.11. (Folytatás.) Oldjuk meg az előző feladatot, ha a dobások száma maga is egy N valószínűségi változó, amely független a dobássorozattól és eloszlása POI(λ). Mi ekkor X és Y együttes eloszlása?

4.I. (4.3 folytatása.) Mutassuk meg, hogy $n > m$ esetén X_m és X_n együttes generátorfüggvénye

$$P(z_1, z_2) = P_m(z_1 P_{n-m}(z_2)),$$

ahol P_i az X_i generátorfüggvénye

4.II. Tegyük fel, hogy egy Amway-ügynök minden nap (más ügynököktől és más napoktól függetlenül) $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 1, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 2 új ügynököt szervez be, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel egyet sem. Juli néni április elsején reggel kezdi szervezni hálózatát. Mennyi lesz az április 30-án este Juli néni hálózatában tevékenykedő ügynökök számának (Juli nénit is beleértve) várható értéke és szórása?

4.III. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású pozitív egész értékű valószínűségi változók $P(z)$ generátorfüggvénnyel, és legyen $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Legyen

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } \exists n \text{, hogy } S_n = k, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Legyen $v_k = \mathbf{P}(Y_k = 1)$, és legyen $\{v_k\}$ generátorfüggvénye $V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$. Mutassuk meg, hogy $V(z) = \frac{1}{1-P(z)}$

4.IV. Az eddigiektől eltérően most tekintsünk egy egyszerű, de aszimmetrikus bolyongást $\mathbb{Z}$-n: $p > q = 1 - p$, ahol p a jobbra lépés valószínűsége. Legyen $\beta_n = \mathbf{P}(\exists j > n : S_j = 0)$. Igazoljuk, hogy a β_n sorozat generátorfüggvénye

$$\beta(z) = \frac{(1 - 4pqz^2)^{1/2} - (p - q)}{(1 - 4pqz^2)^{1/2}(1 - z)}$$

4.A. Egy szabályos $2n$-szög csúcsait találomra párokba szedjük.

(a) Mi annak a p_n valószínűsége, hogy a csúcspárokat összekötő húrok a sokszög belsejében nem metszik egymást?

(b) Mi a $\{p_n\}$ sorozat generátorfüggvényének konvergenciasugara?

(c) Mi a válasz, ha a sokszög konvex, de nem szabályos?

(d) Hogyan lehetne általánosítani a feladatot konvex poliéderre?