Dr. Szász Domokos
Valószínűségszámítás 2. 2007/2008 tavaszi félév
3. feladatsor
Momentum generáló függvények, generátorfüggvény, karakterisztikus függvény

3.1. Számoljuk ki a következő eloszlások momentum generáló függvényét, karakterisztikus függvényét, generátorfüggvényét, és ezek segítségével a várható értékét: $\mathrm{BIN}(n,p), \mathrm{POI}(\lambda), \mathrm{GEO}(p)$, $\mathrm{NBIO}(r,p), \mathrm{DE}[0,n]$. (Itt $\mathrm{NBIO}(r,p)$ jelöli a negatív binomiális eloszlást.)

3.2. Legyen X egy $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változó. Jelöljük eloszlásának generátorfüggvényét $P(z)$-vel. Írjuk fel az $Y := X+1$ és a $Z := 2X$ valószínűségi változók eloszlásának generátorfüggvényét.

3.3. Határozza meg a következő eloszlások momentum generáló függvényét, karakterisztikus függvényét, és ezek segítségével a várható értékét: $\mathrm{E}[a,b], \mathrm{EXP}(\lambda), \mathrm{GAMMA}(s,\lambda), \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$.

3.4. Valószínűségeloszlások generátorfüggvényei-e az alábbi függvények?

$$\text{(a)}\quad \exp\left(\frac{z-1}{\lambda}\right),\quad \lambda>0;\qquad \text{(b)}\quad \frac{(z+1)^6}{64};\qquad \text{(c)}\quad \frac{2}{2-z};\qquad \text{(d)}\quad \frac{2}{1+z}.$$

3.5. Legyen X csonkított Poisson-eloszlású valószínűségi változó:

$$\mathbf{P}(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\qquad (k=1,2,\ldots)$$

Határozzuk meg X generátorfüggvényét, $\mathbf{E}(X)$-et, $\mathbf{D}(X)$-et.

3.6. Legyen X_1 és X_2 független $\mathrm{GEO}(p_1)$ illetve $\mathrm{GEO}(p_2)$ eloszlású valószínűségi változó. Meghatározandó $Y=\min\{X_1,X_2\}$ generátorfüggvénye.

3.7. Legyen X_1 és X_2 független $\mathrm{EXP}(\lambda_1)$ illetve $\mathrm{EXP}(\lambda_2)$ eloszlású valószínűségi változó. Meghatározandó $Y=\min\{X_1,X_2\}$ momentum generáló függvénye.

3.8. (a) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású $\mathbb{Z}^+$-értékű valószínűségi változók, továbbá ν tőlük független, ugyancsak $\mathbb{Z}^+$-értékű valószínűségi változó. Meghatározandó S_ν generátorfüggvénye, ahol

$$S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n\qquad (n\geq 0).$$

(b) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, továbbá ν tőlük független, $\mathbb{Z}^+$-értékű valószínűségi változó. Meghatározandó S_ν karakterisztikus függvénye és momentum generáló függvénye, ahol

$$S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n\qquad (n\geq 0).$$

3.I. Egy kockával addig dobunk, amíg először sikerül kétszer egymás után hatost dobnunk. Jelölje ν a dobások számát. Számítsuk ki ν eloszlásának generátorfüggvényét és ennek segítségével ν várható értékét és szórásnégyzetét.

3.II. Jelölje a_n azon, tetszőleges hosszúságú kockadobás-sorozatok számát, ahol a dobott pontok összege n. Mutassuk meg, hogy az $\{a_n\}$ sorozat generátorfüggvénye $[1-z-z^2-\ldots-z^6]^{-1}$.

3.III. Legyen Y eloszlása $\mathrm{E}(0,1)$, és tegyük fel, hogy az $Y=p$ feltétel mellett az X valószínűségi változóeloszlása $\mathrm{BIN}(n,p)$. Mutassa meg, hogy X eloszlása $\mathrm{DE}[0,n]$.

3.IV. Legyen Y egyszerű valószínűségi változó, momentum generáló függvénye $M(t)$. Mutassa meg, hogy $P(Y > 0) = 0$-ból következik, hogy $P(Y \geq 0) = \inf_t M(t)$. Eléretik az infimum ebben az esetben?

3.A. Szabályos érmével dobunk. Jelölje q_n annak a valószínűségét, hogy az első n dobás során nem fordul elő három egymásutáni fej-dobás. Írjuk föl a q_n sorozat generátorfüggvényét.