Dr. Szász Domokos
Valószínűségszámítás 2. 2007/2008 tavaszi félév
5. feladatsor
Momentum generáló függvények tulajonságai

5.1. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó momentum generáló függvénye $M(t) = e^{3(e^t-1)}$. Mennyi $\mathbb{P}(X = 0)$?

5.2. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos, $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók.

(a) Határozzuk meg a
$$\chi_n^2 = X_1^2 + \ldots X_n^2$$
valószínűségi változó momentum generáló függvényét és eloszlásfüggvényét.

(b) Határozzuk meg a χ_n valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. (Megjegyzés: χ_n ill. χ_n^2 eloszlását n-endrendű χ- ill. χ^2-eloszlásnak nevezik.)

5.3. Az X valószínűségi változó eloszlása $E[0,1]$. Feltéve, hogy $X = p$, az Z valószínűségi változó feltételes eloszlása $B(n,p)$. Határozza meg a Z valószínűségi változó eloszlását.

5.4. A ZH-n n feladatot kapunk. Minden egyes feladatot egymástól függetlenül p valószínűséggel oldok meg. Sőt: minden egyes megoldott feladatra ugyancsak egymástól függetlenül r valószínűséggel kapok egy-egy plusz-pontot. Mennyi a ZH-n az általam kapott összes plusz pontok számának eloszlása?

5.5. Jelölje $\mu_n = \mathbb{E}X^n$, ahol X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mutassa meg, hogy
$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{ha n páratlan} \\ \frac{(2j)!}{2^j j!} & \text{ha n=2j} \end{cases}$$

5.6. Ha Z $N(0,1)$ eloszlású, mennyi $\mathrm{Cov}(Z, Z^2)$?

5.7. Az X valószínűségi változó momentum generáló függvénye $M_X(t) = e^{2e^t-2}$, az Y valószínűségi változóé $M_Y(t) = (\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4})^{10}$. Feltéve, hogy X és Y függetlenek, mennyi

(a) $\mathbb{P}(X + Y = 2)$;

(b) $\mathbb{P}(XY = 0)$;

(c) $\mathbb{E}(XY)$.

5.8. Mutassa meg a momentum generáló függvények módszerével, hogy $n \to \infty$ és $np \to \lambda$ esetén

(a) $B(n,p) \Rightarrow POI(\lambda)$;

(b) ha τ $GEO(p)$ eloszlású, akkor $X = \frac{\tau}{n}$ eloszlása $\Rightarrow EXP(\frac{1}{\lambda})$.

5.9. Mutassuk meg, hogy ha Z_λ eloszlása POI(λ), akkor $\frac{Z_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ eloszlása konvergál $N(0,1)$-hez, ha $\lambda \to \infty$.

5.I. Mutassuk meg, hogy ha Z_λ eloszlása GAMMA(n,λ), akkor $\frac{Z_\lambda - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}}$ eloszlása konvergál $N(0,1)$-hez, ha $n \to \infty$.

5.II. Ha Y_n eloszlása $B(n,p)$ és $n \to \infty$, akkor $\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \Rightarrow N(0,1)$.