Valószínűségszámítás 2

Írta: Pajor-Gyulai Zsolt

2007. december 8.

Ez a jegyzet a Dr.Szász Domokos által a BME TTK matematikus szakán tartott Valószínűségszámítás 2 előadás anyagát tartalmazza. Ez a legelső verzió, valószínűleg hibákkal tele, amennyiben az olvasó észrevesz ilyet, kérem írja meg a pgyzs@math.bme.hu címre.

Tartalomjegyzék

1. A generátorfüggvény és tulajdonságai **2**

2. Elágazó folyamatok és bolyongások **4**

3. Gyenge konvergencia **7**

4. Karakterisztikus függvény **12**

5. Centrális határeloszlás-tételek **19**

6. A Borel-Cantelli lemma **23**

7. Konvergenciatípusok **24**

8. Nagy számok erős törvényei **24**

9. Az iterált logaritmus tétel **24**

10.Stabilis eloszlások **24**

11.Függelék **24**

1. A generátorfüggvény és tulajdonságai

A generátorfüggvény az egyike a valószínűségszámításban alkalmazott analitikus eszközöknek, és mint ilyen, segít abban, hogy számos problémát analízisbeli eszközökkel tudjunk kezelni.

Definíció: Az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat generátorfüggvényének nevezzük a

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

hatványsort, amennyiben $\exists z_0$, hogy $|z| < |z_0|$ esetén a hatványsor konvergens. Ilyen z_0 akkor létezik, ha $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < \infty$

Természetesen minket főleg az az eset érdekel, amikor $(a_n)_{n\geq 0}$ valószínűségi eloszlás, azaz $\exists\xi$ valószínűségi változó, hogy $p_n = \mathbf{P}(\xi = n)$. Ekkor a definíció egy várható érték és $|z| \leq 1$-re a generátorfüggvény mindig létezik:

$$|P(z)| = \left|\mathbf{E}(z^{\xi})\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_n = P(1) \leq 1$$

Figyeljük meg, hogy $\mathbf{P}(|\xi| < \infty) = P(1)$.

Definíció: Egy eloszlás farokösszegének nevezzük a $q_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} p_k$ sorozatot.

Az eloszlás és farokösszegének generátorfüggvénye között egyszerű kapcsolat van:

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} p_n z^k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} p_n z^k =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{P(z) - p_0 - \big(P(1) - (p_0)\big)}{z - 1} = \frac{P(z) - P(1)}{z - 1}$$

így $-1 \leq z < 1$-re így Q(z) is mindenképp konvergens. A $z = 1$ eset ξ várható értékével van kapcsolatban.

Nyilvánvaló, hogy a diszkrét valószínűségi eloszlások és generátorfüggvényeik között bijekció áll fenn, azaz a generátorfüggvényből is egyértelműen visszakapható az eloszlás (illetve általánosabb értelemben a sorozat):

$$a_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$$

Példák generátorfüggvényekre: (A számolás menete a gyakorlatokon)

- $B(n, p) : P(z) = (pz + q)^n$
- $Poi(\lambda) : P(z) = e^{\lambda(z-1)}$
- $Geo(p) : P(z) = \frac{pz}{1-qz}$

Most rátérünk, a momentumok és a generátorfüggvény kapcsolatára.

Tétel: $\mathbf{E}\xi = P'(1) = Q(1)$ (A derviáláson balodali deriváltat értünk)

Bizonyítás: $P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n z^{n-1}$

- Ha $\mathbf{E}\xi < \infty$ akkor $|z| \leq 1$ esetén $P'(z)$ folytonos:

$$|P'(z) - P'(w)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} np_n |z^{n-1} - w^{n-1}| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} np_n |z^{n-1} - w^{n-1}| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} np_n \leq 3\epsilon$$

  Ahol az első tag kisebb, mint ϵ ha rögzített N mellett $|z-w|$ elég kicsi, a második pedig N növelésével tehető tetszőlegesen kicsivé, mivel a sor maga konvergens. Emiatt

$$\mathbf{E}\xi = P'(1) = \lim_{z \nearrow 1} P'(z) = Q(1)$$

- Ha $\mathbf{E}\xi = \infty$ akkor $\lim_{z \nearrow 1} P'(z) = \infty$. Ekkor a középértéktétel miatt

$$\exists z < \sigma_z < 1 : Q(z) = \frac{P(z) - P(1)}{z - 1} = P'(\sigma_z)$$

  Ezért $Q(1) = \lim_{z \to 1} Q(z) = \lim_{\sigma_z \to 1} P'(\sigma_z) = \infty$

A szórásnégyzet szintén megkapható a generátorfüggvényből:

Tétel: $\mathbf{D}^2\xi = P''(1) + P'(1) - \big(P''(1)\big)^2 = 2Q'(1) + Q(1) - \big(Q(1)\big)^2$

Bizonyítás: Ismét szétválasztjuk a két esetet:

- Ha $\mathbf{D}^2\xi < \infty$, akkor

$$\mathbf{D}^2\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n - \big(P'(1)\big)^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_n + \sum_{n=1}^{\infty} np_n - \big(P'(1)\big)^2 =$$

$$= P''(1) + P'(1) - \big(P'(1)\big)^2$$

- Ha $\mathbf{D}^2\xi = \infty$ és $\mathbf{E}\xi < \infty$, akkor $\lim_{z \nearrow 1} P''(z) = \infty$

A bizonyítás Q-ra vonatkozó része hasonló, mint a várható érték esetében, ezért azt az olvasóra hagyjuk.

A fenti bizonyításban szereplő $\mathbf{E}\xi(\xi-1)$, hez hasonlóan, a többi ún. faktoriális momentum is megegyezik $P(z)$ z=1 helyen vett megfelelő deriváltjával:

$$\mathbf{E}\xi(\xi-1)(\xi-2)...(\xi-k+1) = P^{(k)}(1)$$

Ezek segítségével az összes momentum előállítható, azonban nem ez az egyetlen út. Ha G(z) a generátorfüggvény és az összes momentum létezik, akkor $\limsup_{s\to\infty} \sqrt[s]{\frac{M_s}{s!}} < \infty$ esetén, ahol $M_s := \mathbf{E}\xi^s$, a

$$H(w) = G(e^w) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(nw)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{w^s}{s!} \sum_{n=0}^{\infty} p_n n^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{M_s}{s!} w^s$$

függvényt a ξ valószínűségi változó momentum-generáló függvényének nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $M_s = H^{(s)}(0)$. Ugyanolyan feltételek mellett a centrális momentum-generáló függvény hasonlóan:

$$I(w) = e^{-wM_1}H(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-wM_1)^l}{l!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{M_s}{s!} w^s = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-wM_1)^l}{l!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{w^s}{s!} \sum_{k=1}^{\infty} k^s p_k =$$

$$= \sum_{c=0}^{\infty} \frac{w^c}{c!} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \underbrace{\sum_{l=0}^{c} \binom{c}{l} (-M_1)^l k^{c-l}}_{(k-M_1)^c} = 1 + \sum_{c=2}^{\infty} \frac{m_c}{c!} w^c$$

ahol $m_c = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^c$ és a számolásban a $c = l + s, s = c - l$ helyettesítést használtuk.

A generátorfüggvény lehetővé teszi a konvolúciók "egyszerű" kezelését is, mivel független ξ,η valószínűségi változók konvolúciójának generátorfüggvénye:

$$P_{\xi+\eta}(z) = \mathbf{E}z^{\xi+\eta} = \mathbf{E}z^{\xi}\mathbf{E}z^{\eta} = P_\xi(z)P_\eta(z)$$

Ugyanezt kapjuk a hatványsoros alakot felhasználva, ha vesszük a Cauchy-szorzatukat:

$$P_\xi(z)P_\eta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$$

ahol az utolsó tag éppen a ξ és η konvolúciójának generátorfüggvényét adja.

Két diszkrét valószínűségi változó együttes generátorfüggvénye: $H(z, w) = \mathbf{E}(z^\xi w^\eta)$, több változó esetén hasonló a definíció. Az egydimenziós esethez hasonló tételek egyszerűen adódnak.

2. Elágazó folyamatok és bolyongások

Ebben a fejezetben a generátorfüggvény két fontos alkalmazását mutatjuk be: az elágazó folyamatokat és a véletlen bolyongást. Mindkét folyamat az ún. Markov-folyamatok közé tartozik:

Definíció: Egy $\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...$ valószínűségi változó sorozat Markov-tulajdonságú ha $\mathbf{P}(\xi_{n+1} = k | \xi_0 = k_0, ..., \xi_n = k_n) = \mathbf{P}(\xi_{n+1} = k | \xi_n = k_n)$ azaz a folyamat további menetét csak a jelenlegi helyzet határozza meg, nem pedig az, hogy hogyan jutottunk oda.

Elágazó folyamatok (Galton-Watson folyamat)

A 19.sz.-ban Galton és Watson ősi angol családnevek kihalását vizsgálták és egy egyszerű modellt állítottak fel. Csak az apákat vizsgáljuk, tegyük fel, hogy egy apa van kezdetben, neki Z_1^1 darab fia születik, amelynek generátorfüggvénye $G(z)$, majd az apa elhalálozik, hogy mi egyszerűen kezelhessük a nemzedékeket. Ezekből a fiúkból apák lesznek, az i. fiúnak Z_2^i db. fia születik (feltesszük, hogy minden Z eloszlása azonos), és így tovább. Jelöljük az n. generáció lélekszámát X_n-nel. Nyilván $X_0 = 1$, $X_1 = Z_1^1$, $X_2 = Z_2^1 + ... + Z_2^{X_1}$, stb. Ekkor pl. a második generáció generátorfüggvénye:

$$\mathbf{E}z^{X_2} = \mathbf{E}z^{Z_2^1 + \ldots Z_2^{X_1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\big(z^{Z_2^1 + \ldots Z_2^k} | X_1 = k\big) \mathbf{P}(X_1 = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} G^k(z) p_k = G(G(z))$$

Pontosan úgyanígy X_n generátorfüggvénye G(G(...G(z)...)) azaz n-szer iteráljuk G-t.

Véletlen bolyongás

A véletlen bolyongás a valószínűségszámítás egyik legalapvetőbb konstrukciója. Adottak a $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók, ahol $X_i : \Omega \to \mathbb{Z}^d$ és $\mathbf{P}(X_i = \pm e_i) = \frac{1}{2d}$, ahol $e_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i.}, ...0)$ Ekkor az $S_n = X_1 + ... + X_n$ valószínűségi változósorozatot egyszerű szimmetrikus véletlen bolyongásnak (Simple Simmetric Random Walk - SSRW) nevezzük. Ennek 1 dimenziós speciális esetét vizsgáltuk, az előző félévben:

- $X_i : \Omega \to \{-1, 1\}$, $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_i = -1) = 1 - p = q$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$
- $\mathbf{E}S_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i = n\mathbf{E}X_1 = n(p - q) = n(2p - 1)$
- $\mathbf{D}^2 S_n = n\mathbf{D}^2 X_1 = 4np(1 - p)$
- A De Moivre-Laplace tétel miatt:

$$\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\mathbf{D}S_n} \approx N(0, 1) \Rightarrow S_n = n(2p - 1) + 2\sqrt{np(1 - p)} N(0, 1)$$

Vezessük be az ún. létra indexeket: $T_k = min\{n | S_n = k\}$, és jelölje T_1 generátorfüggvényét $G(z)$. Mivel nyilván $T_k = T_1^{(1)} + ... + T_1^{(k)}$, ezért a teljes várhatóérték tételét alkalmazva a bolyongás első lépésére:

$$\mathbf{E}z^{T_k} = \big(G(z)\big)^k = (1 - p)\mathbf{E}(z^{T_k} | S_1 = -1) + p\mathbf{E}(z^{T_k} | S_1 = 1) =$$

$$= (1 - p)\mathbf{E}z^{T_{k+1} + 1} + p\mathbf{E}z^{T_{k-1} + 1} = qz\big(G(z)\big)^{k+1} + pz\big(G(z)\big)^{k-1}$$

Rendezve az egyenletet: $G(z) = qzG(z)^2 + pz$, amiből

$$G(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2qz}$$

A másodfokú egyenlet másik megoldása nem lehet igazi megoldás, mivel akkor $G(0) = \infty$ lenne. Ennek a függvénynek a sorfejtését felhasználva ki tudjuk számítani az 1 első elérésének eloszlását is. Felhasználva, hogy a binomiális sorfejtés szerint

$$\sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)...\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-x)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} (-x)^n = 1 - \frac{1}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} x^n$$

a generátorfüggvényre a

$$G(z) = \frac{2pqz^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} (4pq)^n z^{2n}}{2qz} = pz + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} 2^{n-1} p^n q^{n-1} z^{2n-1}$$

kifejezést kapjuk. Ha alkalmazzuk a $(-1)!! = 1$ konvenciót, akkor ez egyszerűbb alakban:

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} 2^{n-1} p^n q^{n-1} z^{2n-1}$$

Vegyük észre, hogy eszerint $\frac{(2n-3)!!}{n!} 2^{n-1}$ éppen azt adja meg, hogy 2n-1 lépésben hányféleképpen lehet először eljutni 1-be. Vizsgáljuk meg $G(z)$ viselkedését a $z = 1$ helyen:

$$G(1) = \frac{1 - \sqrt{1-4pq}}{2q} = \frac{1 - \sqrt{(1-2p)^2}}{2q} = \frac{1 - |1-2p|}{2q}$$

Amennyiben $p \geq 1/2$ akkor G(1)=1, egyébként $G(1) = p/q$. Ez azért van mivel $q > p$ esetén $g_1, g_2, ...$ nem teljes eseményrendszer, mivel $p_\infty = \mathbf{P}(T_1 = \infty) > 0$. Hasonlóan $G'(z)$ esetében:

$$G'(1) = \frac{1 - |2p-1|}{|2p-1| \pm (2p-1)^2}$$

ami $p > 1/2$ esetén $\frac{1}{2p-1}$, míg $p = 1/2$-re ∞. A $p < 1/2$ esetben a képletből ugyan véges érték jön ki, viszont a várhatóértékhez ezt még ki kell egészíteni egy ∞p_∞ taggal. (A képletben a + előjel a $p > 1/2$ vonatkozik.) A fenti eredményeket összefoglalva:

Tétel: Ha $G(z)$ a T_1 első létraindex generátorfüggvénye, akkor

1. $G(z) = \frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2qz}$
2. $G(1) = 1$ ha $p \geq 1/2$ és $G(1) = p/q$ egyébként.
3. $G'(1) = \frac{1}{2p-1}$ ha $p > 1/2$ és $G'(1) = \infty$ ha $p = 1/2$

Végül megvizsgáljuk a bolyongás origóba való visszatérését, az ún. rekurrenciát. Legyen f_n az első visszatérés eloszlása, azaz $n \geq 1$-re:

$$f_n = \mathbf{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, ..., S_{n-1} \neq 0, S_n = 0)$$

míg $f_0 = 0$. Nyilvánvaló, hogy $f_{2j-1} = 0$ $\forall j$-re. Az $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ generátorfüggvény kiszámításához ismét a teljes valószínűség tételét fogjuk alkalmazni.

$$f_n = pg_{n-1}^{(-1)} + qg_n - 1$$

ahol$g_n^{(-1)}$-el jelöljük a bolyongás origóra való tükörképére (azaz a p és q felcserélésével kapott bolyongásra) vonatkozó g_n értéket. A fenti képlet azt fejezi ki, hogy ha az első lépés felfele történik, akkor a -1 n-1 lépésben történő első elérése, ha lefele, akkor az 1 n-1 lépésben történő első elérése esetén térünk vissza a nullába először az n. időpontban. A generátorfüggvény így:

$$F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} pg_{n-1}^{(-1)} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} qg_{n-1} z^n = pzG^{(-1)}(z) + qzG(z) = 1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}$$

Ezúttal is kiszámoljuk $F(z)$ és $F'(z)$ $z = 1$ helyen felvett értékeit:

$$F(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq} = 1 - |2p - 1| = 2min\{p, q\}$$

Ami azt jelenti, hogy az első visszatérés ideje csak a szimmetrikus esetben véges 1 valószínűséggel (ekkor azt mondjuk, hogy a folyamat rekurrens, ha ez nem teljesül, akkor tranziens).

$$F'(1) = \left.\frac{4pqz}{\sqrt{1 - 4pqz^2}}\right|_{z=1} = \frac{4p(1-p)}{|2p-1|}$$

ami ∞-nel egyenlő p=1/2 esetén egyébként pedig f_n nem teljes eseményrendszer, ezért a várhatóérték akkor is végtelen. Eredményeinket összefoglalva:

Tétel: Ha $F(z)$ az origóba való első visszatérés generátorfüggvénye, akkor

1. $F(z) = 1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}$
2. $F(1) = 1$ ha $p = 1/2$ és $F(1) = 2min\{p, q\}$ egyébként.
3. $F'(1) = \infty$ ha $p = 1/2$, a várhatóérték pedig mindig végtelen.

Végezetül megemlítjük Pólya György híres tételét:

Tétel: A d dimenziós SSRW rekurrens ha $d = 1, 2$ és tranziens ha $d \geq 3$.

3. Gyenge konvergencia

Mostantól a célunk a centrális határeloszlás-tételek bizonyítása lesz, amelyek a karakterisztikus függvények módszerével történnek. A gondolat alapja, hogy a karakterisztikus függvények konvergenciája ekvivalens az eloszlások gyenge konvergenciájával (lsd. folytonossági tétel). Ez a fejezet az utóbbi fogalommal foglalkozik.

Definíció: Az F_n eloszlásfüggvények által meghatározott eloszlássorozat gyengén tart az F eloszlásfüggvény által meghatározott eloszláshoz (jelölés: $F_n \Rightarrow F$ vagy valószínűségi változókkal: $X_n \Rightarrow X$) ha $\forall x \in C_F$ esetén $F_n(x) \to F(x)$ teljesül, ahol C_F az F függvény folytonossági pontjainak halmaza.

Ez a definíció persze nem csak eloszlásfüggvényekre vonatkozhat, hanem tetszőleges függvényekre is. Diszkrét eloszlásokra nagyon egyszerűen látható, hogy mit jelent a definíció:

Lemma: Ha X_n, X diszkrét valségi változók, akkor $X_n \Rightarrow X$ akkor és csak akkor ha $P(X_n = x) \to P(X = x)$ (amely csak megszámlálható sokszor nem nulla).

Bizonyítás: Nyilván $C_F = \mathbf{R} \setminus Ran(X)$. Ekkor $x \in C_F$ esetén $F_n(x) = \sum_{y<x} \mathbf{P}(X_n = y) \to \sum_{y<x} \mathbf{P}(X = y)$, mivel $x \notin Ran(X)$ ezért elég nagy n-re $F_n(x) = F(x)$

Példák :

- $B(n,p) \Rightarrow Poi(\lambda)$ ha $np \to \lambda$
- $p \cdot Geo(p) \Rightarrow Exp(1)$ ha $p \to 0$

Most bebizonyítunk egy szükséges és elégséges feltételt:

Tétel: $F_n \Rightarrow F \Leftrightarrow \forall \varphi \in C(\mathbf{R})$ esetén $\mathbf{E}\varphi(X_n) = \int \varphi dF_n \to \int \varphi dF = \mathbf{E}\varphi(X)$[1] ahol $C(\mathbf{R})$ a valós számokon értelmezett folytonos és korlátos függvények halmaza.

Bizonyítás: A két irányt külön látjuk be:

$\Rightarrow$ Tegyük fel, hogy $F_n \Rightarrow F$ Első lépésként leválasztjuk az eloszlások pozitív és negatív farkát. Mivel F eloszlásfüggvény, ezért $\forall \epsilon$-ra $\exists x_-, x_+ \in C_F$, hogy $F_n(x_-), F(x_-), 1 - F_n(x_+), 1 - F(x_+) < \epsilon$. (A teljes sorozatra a nem folytonos pontokon - amelyek F monoton volta miatt Lebesgue tétele szerint csak megszámlálhatóan sokan vannak - kívül való konvergencia miatt létezik univerzális ϵ.) Ezzel rögtön írhatjuk:

$$\left| \int \varphi dF_n - \int \varphi dF \right| \le \left| \int_{x_-}^{x_+} \varphi dF_n - \int_{x_-}^{x_+} \varphi dF \right| +$$

$$+ \left| \int_{-\infty}^{x_-} \varphi dF_n + \int_{x_+}^{\infty} \varphi dF_n - \int_{-\infty}^{x_-} \varphi dF - \int_{x_+}^{\infty} \varphi dF \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_-}^{x_+} \varphi dF_n - \int_{x_-}^{x_+} \varphi dF \right| +$$

$$+ ||\varphi|| \big(F_n(x_-) + F(x_-) + (1 - F_n(x_+)) + (1 - F(x_+)) \big) <$$

$$< 4\epsilon ||\varphi|| + \left| \int_{x_-}^{x_+} \varphi dF_n - \int_{x_-}^{x_+} \varphi dF \right|$$

ahol $||\varphi||$ természetesen a supremum-norma. Tudjuk, hogy a folytonos, korlátos függvények egyenletesen folytonosak is, ezért $\exists \delta$, hogy

[1] $\int f(x)dF(x)$ az F eloszlásfüggvény által generált Lebesgue-Stieltjes mérték szerinti integrál. Ha az olvasó esetleg nem szimpatizál ennyire a mértékelmélettel, akkor gondoljunk dF-re úgy mint $dF(x) = \mathbf{P}(X \in [x, x + dx])$, ahol ez most nem írható fel $f(x)dx$ alakban valamely f sűrűségfüggvénnyel mint az abszolút folytonos esetben (A Dirac-δ nem függvény hanem disztribúció!!).

$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| < \epsilon$ ha $|y_1 - y_2| < \delta$. Most a megmaradó intervallumot bontsuk fel kis δ hosszúságú intervallumok uniójára: $[x_-, x_+] = \cup_{j\in J} I_j$, ahol $I_j = [a_j, b_j]$, $|I_j| < \delta$, $a_j, b_j \in C_F$ (ez megint csak a Lebesgue-tétel miatt követelhető meg), $b_j = a_{j+1}$ és vezessük be az F által generált $F(I_j) = F(b_j) - F(a_j)$ Lebesgue-Stieltjes mértéket (a mérték ennek kiterjesztése)! Ekkor egy I_j intervallumra:

$$\int_{I_j} \varphi(x) dF_n(x) = \int_{I_j} \varphi(x) - \varphi(a_j) dF_n(x) + \int_{I_j} \varphi(a_j) dF_n(x)$$

ahol az első tag tetszőlegesen kicsivé tehető ϵ csökkentésével:

$$\left| \int_{I_j} \varphi(x) - \varphi(a_j) dF_n(x) \right| \leq \int_{I_j} \left| \varphi(x) - \varphi(a_j) \right| dF_n(x) < \epsilon F_n(I_j)$$

ezzel

$$\left| \int_{x_-}^{x_+} \varphi dF_n - \int_{x_-}^{x_+} \varphi dF \right| = \left| \sum_{j\in J} \left(\int_{I_j} \varphi dF_n - \int_{I_j} \varphi dF \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j\in J} \left| \int I_j \varphi dF_n - \int_{I_j} \varphi dF \right| \leq \sum_{j\in J} \varphi(a_j) |F_n(I_j) - F(I_j)| +$$

$$+ \left| \int_{I_j} \varphi(x) - \varphi(a_j) dF_n(x) - \int_{I_j} \varphi(x) - \varphi(a_j) dF(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j\in J} \varphi(a_j) |F_n(I_j) - F(I_j)| + \epsilon \left(\sum_{j\in J} (F_n(I_j)) + \sum_{j\in J} F(I_j) \right)$$

Mivel $a_j, b_j \in C_F$, $F_n(I_j) \to F(I_j)$ tehát az első tag $< ||\varphi||\epsilon$. A második tagnál $\sum_{j\in J} F_n(I_j) = F_n(x_-, x_+) \leq 1$ ugyanígy az F-es tag is, azaz végeredményben:

$$\left| \int \varphi dF_n - \int \varphi dF \right| \leq \epsilon (5||\varphi|| + 2)$$

$\Leftarrow$ Tegyük fel, hogy minden folytonos, korlátos függvényre az integrál konvergál. Ekkor legyen x F(x) egy folytonossági pontja és

$$H_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \leq x \\ 0 & \text{ha } t > x \end{cases}$$

Ekkor $F_n(x) = \int H_x(t) dF_n(t)$. Legyen $\varphi_{x,y}(t)$ $H_x(t)$ folytonos közelítése:

$$\varphi_{x,y}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \leq x \\ \frac{y-t}{y-x} & \text{ha } x \leq t \leq y \\ 0 & \text{ha } t \geq y \end{cases}$$

ahol $x < y$ és $y \in C_F$. Ekkor mivel $H_x(t) \leq \varphi_{x,y}(t) \leq H_y(t)$,

$$\begin{gathered} F_n(x) \leq \int \varphi_{x,y} dF_n \leq F_n(y) \\ \downarrow \\ F(x) \leq \int \varphi_{x,y} dF \leq F(y) \end{gathered}$$

ekkor ha $y = x + \epsilon$

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F(y) = F(x+\epsilon) \qquad \forall\epsilon > 0$$

ezért $x \in C_F$ miatt $\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F(x)$. Felcserélve x és y szerepét: $F(x-\epsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x)$ $\forall\epsilon > 0$, így megintcsak $x \in C_F$ miatt $\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \ge F(x)$. A kettőt összevetve kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

Természetesen nem minden $\{F_n\}$ eloszlásfüggvény-sorozat konvergál gyengén viszont a következő tétel szerint mindnek van ilyen részsorozata.

Helly tétel: $\forall\{F_n\}$ sorozatra $\exists\{F_{n_k}\}$ részsorozat és F monoton, balról folytonos, nemnegatív függvény, hogy $\forall x \in C_F$-re $F_{n_k}(x) \to F(x)$ amint $k \to \infty$.

Bizonyítás: Legyen r_1, r_2, r_3,... a racionális számok egy sorbarendezése. A Bolzano-Weierstrass tétel miatt

$$\begin{gathered} F_n(r_1)\text{-hez } \exists F_{n_k(1)}(r_1) \to G(r_1) \\ F_{n_k(1)}(r_2)\text{-hez } \exists F_{n_k(2)}(r_2) \to G(r_2) \\ \ldots \\ F_{n_k(j-1)}(r_j)\text{-hez } \exists F_{n_k(j)}(r_j) \to G(r_j) \\ \ldots \end{gathered}$$

így $\{n_k(1)\} \supseteq \ldots \supseteq \{n_k(j)\} \supseteq \ldots$. Tekintsük most az $F_{n_1(1)}$,...,$F_{n_j(j)}$,... sorozatot! Mivel egy konvergens sorozat minden részsorozata ugyanoda tart, az indexhalmazok egymásba ágyazottsága miatt

$$\forall r_i \in \mathbf{Q}\text{-ra} \qquad \lim_{j\to\infty} F_{n_j(j)}(r_i) = G(r_i)$$

Mivel tetszőleges $s < r$ racionális számokra $\forall k$ esetén $F_{n_k(k)}(s) \le F_{n_k(k)}(r)$, ezért $G(s) \le G(r)$, azaz G is monoton nemcsökkenő (ez egyébként az indexhalmazok egymásba ágyazottságának következménye). Legyen most $F(x) = \sup_{r\in\mathbf{Q}}\{G(r)|r < x\}$. Nyilvánvaló, hogy F monoton nemcsökkenő és nemnegatív, továbbá balról folytonos: A supremum definíciója miatt $\forall x \in \mathbf{R}$ és $\forall\epsilon > 0$-ra $\exists r < x$ racionális szám, hogy $G(r) > F(x) - \epsilon$. Ha most $r < y < x$ akkor

$$F(x) - \epsilon < G(r) \le F(y) \le F(x)$$

és emiatt $F(y) \nearrow F(x)$ ha $y \nearrow x$. Most megmutatjuk, hogy $F_{n_k(k)} \Rightarrow F$. Legyen $x \in C_F$, $s, r \in \mathbf{Q}$ és $y \in \mathbf{R}$ olyan, hogy $s < x < r < y$, $F(y) < F(x) + \epsilon$ (ilyen van a folytonosság miatt) és $G(s) > F(x) - \epsilon$ (definíció miatt) .

$$F(x) - \epsilon < G(s) \le G(r) \le F(y) < F(x) + \epsilon$$

Ugyanakkor, mivel $F_{n_k(k)}$ eloszlásfüggvény, igaz az is, hogy

$$F_{n_k(k)}(s) \le F_{n_k(k)}(x) \le F_{n_k(k)}(r)$$

Itt az előzőek szerint a bal és a jobboldali kifejezés G(s)-hez, illetve G(r)-hez tart. Végeredményben tehát azt kaptuk, hogy $\forall\epsilon > 0$-ra

$$F(x) - \epsilon \le \lim_{k\to\infty} F_{n_k(k)}(x) \le F(x) + \epsilon$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $F_{n_k(k)}(x) \to F(x)$.

A fenti tételben F nem feltétlenül eloszlásfüggvény, mivel elképzelhető, hogy $\lim_{x\to\infty} F(x) < 1$ vagy $\lim_{x\to-\infty} F(x) > 0$. Ez akkor fordul elő ha tömeg megy ki a végtelenbe (pl. $\mathbf{P}(X_n = n) = 1$ esetén $F(x) \equiv 0$). A következő fogalom segítségével azonban definiálhatunk egy kritériumot, amely teljesülése esetén ez a probléma nem lép fel.

Definíció: Az F_n sorozat feszes, ha $\forall\epsilon > 0$-ra $\exists[a, b]$ véges intervallum, hogy $F_n[a, b] \geq 1 - \epsilon$ $\forall n$-re.

Tétel: A feszesség szükséges és elégséges feltétele annak, hogy $\forall\{F_{n_j}\}$ részsorozatra legyen olyan $F_{n_{j(l)}}$ további részsorozat és F eloszlásfüggvény, hogy $F_{n_{j(l)}} \Rightarrow F$, amint $l \to \infty$.

Bizonyítás :

$\Rightarrow$: Helly tétele miatt $\exists F_{n_j(l)} \Rightarrow F$ (F monoton nemcsökkenő, belről folytonos, nem negatív), a feszesség miatt pedig $\forall\epsilon > 0$: $\exists[a, b]$, hogy $F_n[a, b] \geq 1 - \epsilon$ $\forall n$-re. Ha ekkor a és b nem lenne F-nek folytonossági pontja, akkor $\exists a' < a$, $b' > b$, hogy $a', b' \in C_F$ és ekkor $F[a', b'] > F[a, b]$. Ekkor

$$\begin{matrix} F_{n_j(l)}(a') \to F(a') \\ F_{n_j(l)}('b) \to F(b') \end{matrix} \Rightarrow F[a', b'] \geq 1 - \epsilon$$

tehát F eloszlásfüggvény, nem megy tömeg a végtelenbe.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy F_n nem feszes, azaz, hogy $\exists\epsilon > 0$, hogy minden véges $[a, b]$ intervallumra $\exists n \in \mathbf{N}$, hogy $F_n[a, b] < 1 - \epsilon$ Ekkor válasszuk ki az $\{n_k\}$ indexhalmazt úgy, hogy $F_{n_k}[-k, k] < 1 - \epsilon$. Ekkor a tétel feltevése miatt $\{F_{n_k}\}$-ból kiválaszthatunk egy $\{F_{n_k(l)}\}$ részsorozatot úgy, hogy az gyengén tart valamilyen F eloszlásfüggvényhez. Legyen most $[a, b]$ tetszőleges olyan véges intervallum, melyre $a, b \in C_F$ és $F[a, b] > 1 - \epsilon$. Elég nagy l-re $[-k(l), k(l)] \supset [a, b]$ teljesül, emiatt

$$1 - \epsilon > F_{n_k(l)}[-k(l), k(l)] \geq F_{n_k(l)}[a, b] \to F[a, b] > 1 - \epsilon$$

azaz megkaptuk a kívánt ellentmondást.

A végső eredményhez szükségünk van a következő egyszerű tényre:

Lemma: Ha az $(a_n)_{n\geq1} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozathoz $\exists A \in \mathbf{R}$, hogy $\forall(a_{n_k})_{k\geq1}$ részsorozathoz $\exists(a_{n_k(l)})_{l\geq1}$ további részsorozat, amelyre $\lim_{l\to\infty} a_{n_k(l)} = A$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a tétel állítása nem igaz. Ekkor biztosan létezik a sorozatnak $B \neq A$ torlódási pontja (most értsük ide a végtelent is). Ez pontosan azt jelenti, hogy létezik olyan részsorozat, amely B-hez tart. Viszont ennek minden részsorozata szintén B-hez fog tartani, mivel konvergens sorozatnak minden részsorozata az eredeti sorozat határértékéhez tart. Ezzel tehát találtunk egy olyan részsorozatot amiből nem választható ki A-hoz tartó részsorozat.

Ennek segítségével egyszerűen kapjuk, hogy a fenti tételbelen magára az $\{F_n\}$ sorozatra is $F_n \Rightarrow F$, mivel az előző tétel következményeképp minden φ folytonos-korlátos függvényre a $\{\int \varphi(x)dF_n(x)\}$ sorozat bármely részsorozatából kiválasztható olyan további részsorozat, hogy $\int \varphi(x)dF_{n_k(l)} \to \int \varphi(x)dF$. A lemma miatt ez azt jelenti, hogy $\int \varphi(x)dF_n(x) \to \int \varphi(x)dF(x)$, ebből pedig a fejezet legelső tétele szerint $F_n \Rightarrow F$. Összefoglalva:

Tétel: Az $\{F_n\}$ eloszlásfüggvény-sorozat feszessége szükséges és elégséges ahhoz, hogy $\exists F$ eloszlásfüggvény, melyre $F_n \Rightarrow F$.

4. Karakterisztikus függvény

A karakterisztikus függvény a generátorhoz hasonlóan egy nagyon gyakran használt analitikus eszköz a valószínűségszámításban. Tulajdonképpen nem másról van szó, mint az eloszlásfüggvény által generált Lebesgue-Stieltjes mérték szerinti Fourier-transzformációról.

Definíció: A $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényének nevezzük a $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $\psi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = \mathbf{E}cos(t\xi) + i\mathbf{E}sin(t\xi)$ komplex értékű függvényt.

Példák: (A számolás a gyakorlatokon)

- Konstans: $\mathbf{P}(\xi = a) = 1$, akkor $\psi_{\delta_a}(t) = e^{ita}$
- Bernoulli: $\psi_{B(1,p)} = pe^{it} + (1-p)$
- Egyenletes: $\psi_{E[-a,a]} = \frac{\sin(ta)}{ta}$
- Exponenciális: $\psi_{Exp(\lambda)} = \frac{\lambda}{\lambda - ti}$
- Normális: $\psi_{N(\mu,\sigma)} = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
- Binomiális: $\psi_{B(n,p)} = (pe^{it} + (1-p))^2$
- Poisson: $\psi_{Poi(\lambda)} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$
- Geometriai: $\psi_{Geo(p)} = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
- Cauchy: $\psi_{Cau} = e^{-|t|}$

Definíció: Egy $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ függvényt pozitív definitnek nevezünk, ha $\forall t_1, ..., t_n \in \mathbf{R}$ és $\forall z_1, ..., z_n \in \mathbf{C}$ esetén

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_j \overline{z}_k \psi(t_j - t_k) > 0$$

a pozitív szemidefinit illetve a továbbiak definíciója nyilvánvaló.

A karakterisztikus függvény alaptulajdonságai:

- Ha ξ, η függetlenek, akkor $\psi_{\xi+\eta}(t) = \mathbf{E}e^{it(\xi+\eta)} = \mathbf{E}e^{it\xi}\mathbf{E}e^{it\eta} = \psi_\xi(t)\psi_\eta(t)$
- $\psi(-t) = \mathbf{E}cos(-t\xi) + i\mathbf{E}sin(-t\xi) = \mathbf{E}cos(t\xi) - i\mathbf{E}sin(t\xi) = \overline{\psi(t)}$
- $\psi(a\xi + b) = \mathbf{E}e^{it(a\xi+b)} = e^{itb}\mathbf{E}e^{ita\xi} = e^{itb}\psi(at)$
- $\psi_{-\xi}(t) = \psi_\xi(-t) = \overline{\psi_\xi(t)}$

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad egy valós-komplex függvény karaterisztikus függvény voltára:

Hincsin-Bochner tétel: $\psi(t)$ akkor és csak akkor karakterisztikus függvény, ha

1. $\psi(0) = 1$
2. $\psi(t)$ egyenletesen folytonos
3. $|\psi(t)| \leq 1$ $\forall t$-re.
4. $\psi(t)$ pozitív szemidefinit függvény.

Bizonyítás: Csak a tulajdonságokat szükségességét igazoljuk, az elégségességet nem (Bochner-tétele).

1. Triviális.
2. Alkalmazzuk a definíciót:

$$|\psi(t+h) - \psi(t)| = \left| \int e^{i(t+h)}x - e^{itx} dF(x) \right| \leq \int \underbrace{|e^{itx}|}_{1} |e^{ihx} - 1| dF(x) =$$

$$= \int_{|x| \leq L} \underbrace{|e^{ihx} - 1|}_{\leq |hx| \text{ (köv. lemma)}} dF(x) + \int_{|x|>L} \underbrace{|e^{ihx} - 1}_{\leq 2}| dF(x) \leq$$

$$\leq |h| L \mathbf{P}(-L \leq \xi \leq L) + 2\mathbf{P}(|\xi| > L)$$

Ha most adott ϵ-hoz L elég nagy, akkor $\mathbf{P}(|\xi| > L) < \epsilon$, majd ezután h-t elég kicsire választva $|h|L < \epsilon$, így végül

$$|\psi(t+h) - \psi(t)| < 3\epsilon$$

3. $\left| \int e^{itx} dF(x) \right| \leq \int \left| e^{itx} \right| dF(x) = 1$
4. Egyszerűen adódik egy átalakítással:

$$0 \leq \mathbf{E} \Big| \sum_{j=1}^{n} z_j e^{it_j\xi} \Big|^2 = \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^{n} z_j e^{it_j\xi} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k e^{-it_k\xi} \right)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z}_k \mathbf{E} e^{i(t_j - t_k)\xi} = \sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z}_k \psi(t_j - t_k)$$

Végül bebizonyítjuk a karakterisztikus-függvénynek még egy alapvető tulajdonságát:

Riemann-Lebesgue lemma: Ha ξ-nek létezik sűrűségfüggvénye, akkor $\psi(t) \to 0$, amennyiben $|t| \to \infty$.

Bizonyítás: Mivel $\in L_1$, $\exists g_\epsilon(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k I_{[a_k,b_k]}(x)$, hogy $\int |f - g_\epsilon| dx < \epsilon$ (lépcsősfüggvény-közelítés). Ebből az is következik, hogy

$$\left| \int f(x) e^{itx} dx - \int g_\epsilon(x) e^{itx} dx \right| < \epsilon$$

és

$$\int g_\epsilon(x) e^{itx} dx = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \int_{a_k}^{b_k} e^{itx} dx = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{e^{itb_k} - e^{ita_k}}{it} \to 0$$

amint $|t| \to \infty$.

A következő eredmény rendkívül fontos lesz a továbbiakban.

Lemma:

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq min \left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right] \; \forall n \geq 0 \text{ és } \forall x \in \mathbf{R}$$

Bizonyítás: Egy iterációt használunk ki. Parciális integrálással:

$$I_n := \int_0^x (x-s)^n e^{is} ds = \left[-\frac{(x-s)^{n+1}}{n+1} e^{is} \right]_0^x + \frac{i}{n+1} \int_0^x (x-s)^{n+1} e^{is} ds =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{i}{n+1} I_{n+1}$$

azaz

$$I_n = \frac{I_{n-1} - \frac{x^n}{n}}{\frac{i}{n}}$$

Mivel $I_0 = \int_0^x e^{is} ds = \frac{e^{ix}-1}{i}$,

$$e^{ix} = 1 + iI_0 = 1 + ix + i^2 I_1 = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + ... + \frac{(ix)^n}{n!} + \frac{i^{n+1}}{n!} I_n$$

és ezzel

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{n!} \int_0^x (x-s)^n ds = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ugyanakkor az is igaz, hogy

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{n!} \frac{|I_{n-1} - \frac{x^n}{n}|}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_0^x (x-s)^{n-1} (e^{is} - 1) ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{2x^n}{n!} \leq \frac{2|x|^n}{n!}$$

Könnyen látható, hogy az első kifejezés akkor kisebb vagy egyenlő, ha $\frac{|x|}{n+1} \leq 2$

Most a karakterisztikus függvény Taylor-sorfejtésével fogunk foglalkozni, amihez az előző és a következő lemmát használjuk fel.

Lemma: Ha $1 \leq \alpha \leq \beta$, akkor $\exists \mathbf{E}\xi^\beta \Rightarrow \exists \xi^\alpha$

Bizonyítás: Használjuk a Hölder egyenlőtlenséget:

$$\mathbf{E}|fg| \leq ||f||_p ||g||_q \qquad p \geq 0 \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Itt természetesen $f \in L^p_F(\Omega)$ és $g \in L^q_F(\Omega)$. Ha most $f = |\xi|^\alpha$ és $g \equiv 1$:

$$\mathbf{E}(|\xi|^\alpha) \leq \left(\mathbf{E}|\xi|^{\alpha\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \mathbf{E}1^{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \left(\mathbf{E}|\xi|^\beta\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Mivel véges mérték szerint integrálunk az aszolút konvergencia ekvivalens a konvergenciával.

Tétel: A karakterisztikus függvény Taylor-sorfejtése:

1. Ha $\exists \mathbf{E}\xi^n$, akkor

$$\left|\psi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\mathbf{E}\xi^k\right| \leq \mathbf{E}min\left[\frac{|t\xi|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|t\xi|^n}{n!}\right]$$

2. Ha létezik az összes momentum és $\lim_{n\to\infty} \frac{|t|^n\mathbf{E}|\xi|^n}{n!} = 0$, akkor

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}\mathbf{E}\xi^k$$

3. Ha $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t_0|^k}{k!}\mathbf{E}|\xi|^k = \mathbf{E}e^{|t_0x|} < \infty$, akkor 2, áll $\forall |t| \leq |t_0|$
4. Ha $\exists \mathbf{E}\xi^n$, akkor

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\mathbf{E}\xi^k + o(t^n) \text{ ha } t \to 0$$

Bizonyítás :

1. Az első lemmát használjuk $x = t\xi$-re:

$$\left|e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{it\xi}{k!}\right| \leq min\left[\frac{t^{n+1}|\xi|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2t^n|\xi|^n}{n!}\right]$$

Ezt felhasználva:

$$\left|\psi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\mathbf{E}\xi^k\right| \leq \mathbf{E}\left|e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{it\xi}{k!}\right| \leq \mathbf{E}min\left[\frac{t^{n+1}|\xi|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2t^n|\xi|^n}{n!}\right]$$

ahol a második lemma és a feltevés miatt az összes momentum létezése biztosított.

2.
$$\left|\psi(t) - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\mathbf{E}\xi^k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\psi(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\mathbf{E}\xi^k\right| \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}\frac{|t|^{n+1}\mathbf{E}|\xi|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

mivel elég nagy n-re az első becslés lesz a jobb. (De a másodikra ugyanaz lenne érvényes.)

3.
$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\mathbf{E}\xi^k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k}{k!}\mathbf{E}|\xi|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t_0|^k}{k!}\mathbf{E}|\xi|^k < \infty$$

és emiatt $\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\mathbf{E}\xi^k$

4. Az 1, pontot felhasználva:
$$\frac{\left|\psi(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\mathbf{E}\xi^k\right|}{|t|^n} \leq \frac{2}{n!}\mathbf{E}\big[|t||\xi|^{n+1}, |\xi|^n\big] \to 0$$

Most pedig megmutatjuk a fordított irányt, azaz hogy a karakterisztikus függvényből hogy kaphatóak meg a momentumok.

Deriválttétel: Ha $\mathbf{E}\xi^k < \infty$, akkor $\psi^{(k)}(t) = \mathbf{E}\Big((i\xi)^k e^{it\xi}\Big)$, speciálisan
$$\psi^{(k)}(0) = i^k\mathbf{E}\xi^k$$

Bizonyítás: Az első deriváltra közvetlen számolással adódik:
$$\left|\lim_{h\to 0}\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h} - \mathbf{E}\big(i\xi e^{it\xi}\big)\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h} - \mathbf{E}\big(i\xi e^{it\xi}\big)\right| =$$
$$\lim_{h\to 0}\left|\int e^{itx}\left[\frac{e^{ihx}-1}{h} - ix\right]dF(x)\right| \leq \lim_{h\to 0}\int\left|\frac{e^{ihx}-1}{h} - ix\right|dF(x) \leq$$
$$\leq \int 2|x|dF(x) < \infty$$

a tétel feltevése szerint. Emiatt az integrál felcserélhető a határátmenettel:
$$\left|\lim_{h\to 0}\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h} - \mathbf{E}\big(i\xi e^{it\xi}\big)\right| \leq \int\left|\lim_{h\to 0}\frac{e^{ihx}-1}{h} - ix\right|dF(x) \to 0$$

A többi deriváltra indukcióval könnyen adódik a tétel állítása.

Most megmutatjuk, hogy a karakterisztikus függvény egyértelműen rendelhető egy eloszláshoz. Ehhez nem kell mást tennünk, mint megadni az inverziós formulát:

Tétel: Ha a ξ valószínűségi változó eloszlása által indukált mértéket μ-vel jelöljük ($\mu(A) = \mathbf{P}(\xi \in A)\ A \subseteq \mathbf{R}$), akkor

$$\mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) = \lim_{T\to\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\psi(t)dt}_{I_T}$$

Bizonyítás:

$$I_T = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt\mu(dx)$$

Írjuk poláris alakban:

$$I_T = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T} \tfrac{\sin t(x-a) - \cos t(x-b) + i\big(\sin t(x-a) - \sin t(x-b)\big)}{it} dt\mu(dx) =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\int_0^T \tfrac{\sin t(x-a) - \sin t(x-b)}{t}dt + i\int_{-T}^{T}\tfrac{\cos t(x-b) - \cos t(x-a)}{t} dt\mu(dx)$$

A cos-os integrál az integrandus párossága miatt eltűnik. A sin-os kezeléséhez felhasználjuk azt, hogy

$$\int_0^T \frac{\sin\theta t}{t}dt = \int_0^{T\theta}\frac{\sin x}{x}dx = sign(\theta)S(T|\theta|)$$

Ezzel

$$I_T = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} sign(x-a)S(T|x-a|) - sign(x-b)S(T|x-b|)\mu(dx)$$

Végül azt felhasználva, hogy $lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$:

$$I_T \to \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = a \\ 1 & \text{ha } a < x < b \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = b \\ 0 & \text{ha } x > b \end{cases} \mu(dx) = \mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\})$$

ahol a konvergenciát a kis-Lebesque tétel miatt vihettük be az integrálon belülre[2].Vegyük észre, hogy az integrál konvergenciája a bizonyítás része. Például ha $\mu = \delta_0$, akkor $\psi(t) \equiv 1$ és $a = -1, b = 1$-re az integrál nem is abszolút konvergens.

Az, hogy μ-nek létezik-e sűrűségfüggvénye, egyszerűen leolvasható a karakterisztikus függvényből:

Tétel: Ha $\psi \in L^1$, akkor létezik μ-nek létezik folytonos sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\psi(t)dt$$

[2](Ω, F, P) véges mértéktér $h, h_n : \Omega \to \mathbf{R}$ $h_n \to h$ m.m., akkor ha $|h_n| \leq C$ m.m $\forall n$-re, akkor $\int h_n d\mu \to \int h d\mu$

Bizonyítás: Mivel

$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\right| = \left|\int_a^b e^{-ity}dy\right| \leq |b-a|$$

ezért az inverziós formulában szereplő integrál abszolút konvergens és

$$\mu((a,b))+\mu(\{a,b\}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\psi(t)dt \leq \frac{(b-a)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(t)|dt$$

ezért nincsen egy pontra koncentrált valószínűségi tömeg az eloszlásban, mert a,b megfelelő választásával a kifejezés tetszőlegesen kicsivé tehető. Emiatt írhatjuk:

$$f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mu([x,x+h))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\left(\frac{1-e^{-ihx}}{iht}\right)\psi(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-e^{-ihx}}{iht}\right)\psi(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-e^{-ihx}}{iht}\right)\psi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\psi(t)dt$$

Most már nem maradt más hátra, minthogy megvizsgáljuk a kapcsolatot a karakterisztikus függvények konvergenciája, illetve a megfelelő eloszlások gyenge konvergenciája között. Erre vonatkozik a következő ún. folytonossági tétel.

Tétel: Ha F_n, F eloszlásfüggvények, $\psi_n(t), \psi(t)$ a karakterisztikus függvényeik, akkor $F_n \Rightarrow F \Leftrightarrow \psi_n(t) \to \psi(t)\ \forall t \in \mathbf{R}$. A konvergencia egyenletes minden kompakt intervallumon.

Bizonyítás :

$\Rightarrow$: Feltesszük, hogy $F_n \Rightarrow F$. Definíció szerint:

$$\psi_n(t) = \int e^{itx}dF_n(x)$$

Hasonlóan a 3. fejezetben látottakhoz, megint leválasztjuk a nagyon-nagy és nagyon kis értékeket: $\forall\epsilon > 0$-ra $\exists\lambda \in C_F$, hogy $F(-\lambda) < \frac{\epsilon}{8}$ és $F(\lambda) > 1 - \frac{\epsilon}{8}$. Ekkor

$$\left|\int_{|x|>\lambda} e^{itx}dF(x)\right| < \frac{\epsilon}{4}$$

A konvergencia miatt $\exists N \in \mathbf{N}$, hogy $n > N$ esetén $F_n(-\lambda) < \frac{\epsilon}{8}$ és $F_n(\lambda) > 1 - \frac{\epsilon}{8}$, emiatt szintén

$$\left|\int_{|x|>\lambda} e^{itx}dF_n(x)\right| < \frac{\epsilon}{4}$$

Ekkor parciális integrálással, majd ha n elég nagy:

$$|\psi_n(t) - \psi(t)| < \left| \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixt} d(F_n(x) - F(x)) \right| + \frac{\epsilon}{2} \leq$$

$$\leq \underbrace{|F_n(\lambda) - F(\lambda)|}_{<\frac{\epsilon}{6}} + \underbrace{|F_n(-\lambda) - F(-\lambda)|}_{<\frac{\epsilon}{6}} + \underbrace{t \int_{-\lambda}^{\lambda} |F_n(x) - F(x)| dx}_{<\frac{\epsilon}{6}} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Minden véges t-értékre. (Ebből következik a kompakt intervallumon való egyenletes folytonosság is).

$\Leftarrow$: Most azt tesszük fel, hogy $\psi_n(t) \to \psi(t)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\{F_n\}$ feszes.

$$\frac{1}{u} \int_{-u}^{u} (1 - \psi_n(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \int_{-u}^{u} (1 - e^{itx}) dt dF_n(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2 - \frac{1}{u} \int_{-u}^{u} e^{itx} dt dF_n(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{e^{iux} - e^{-iux}}{iux} \right) dF_n(x) =$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} 1 - \frac{\sin ux}{ux} dF_n(x) \geq 2 \int_{|x| \geq \frac{2}{u}} 1 - \frac{1}{|ux|} dF_n(x) \geq$$

$$\geq \int_{|x| \geq \frac{2}{u}} dF_n(x) = F_n\left(-\frac{2}{u} \right) + \left(1 - F_n\left(\frac{2}{u} \right) \right)$$

Mivel az első kifejezés egy integrál-középérték $1 - \psi(t)$-re $t = 0$ körül, ezért $\forall \epsilon > 0$-ra $\exists u > 0$, hogy $\frac{1}{u} \int_{-u}^{u} (1 - \psi(t)) dt < \epsilon$ és a konvergencia miatt $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $\frac{1}{u} \int_{-u}^{u} (1 - \psi_n(t)) dt < \epsilon$. Ekkor a fenti számolás miatt $a = \frac{2}{u}$-ra $F_n[-a, a] \geq 1 - \epsilon$ $n > n_0$-ra. Viszont ekkor nyilván $\exists a' > a$, hogy $F_n[-a', a'] \geq 1 - \epsilon$ $\forall n$-re, tehát F_n feszes. Ekkor a 3. fejezet utolsó tétele miatt van olyan G eloszlásfüggvény, melyre $F_n \Rightarrow G$ Ha most $G \neq F$, akkor a tétel első fele miatt $\psi_n(t) \to \psi_G(t) \neq \psi$, ami ellentmond az unicitásnak. (Gondoljuk meg, hogy ha $F \neq G$ és mindketten eloszlásfüggvények, akkor a balról folytonosság miatt nem csak nullmértékű halmazon különböznek)

5. Centrális határeloszlás-tételek

A centrális határeloszlás-tételek valószínűségi változók összegének aszimptotikus eloszlásaira vonatkoznak és a valószínűségszámítás legalapvetőbb eredményei közé tartoznak. Egy CHT-val már találkoztunk, ez volt a De-Moivre-Laplace tétel az előző félév végén (lsd. második fejezet). Először egy segédtételt bizonyítunk be.

Teleszkóp egyenlőtlenség: Ha $z_1, ...z_l, w_1, ..., w_l \in \{|z| \leq 1\}$ akkor

$$\left| \prod_{i=1}^{l} z_i - \prod_{i=1}^{l} w_i \right| \leq \sum_{i=1}^{l} |z_i - w_i|$$

Bizonyítás:

$$\prod_{i=1}^{l} z_i - \prod_{i=1}^{l} w_i = (z_1 - w_1)\prod_{i=2}^{l} z_i + w_1(z_2 - w_2)\prod_{i=3}^{l} z_i + w_1 w_2(z_3 - w_3)\prod_{i=4}^{l} z_i + \ldots$$

Abszolút értéket véve, mivel $z_i, w_i \in \{|z| \le 1\}$, a lemma állítása adódik.

Most pedig következzen az első, egyik legalapvetőbb CHT:

Lindeberg-Levy CHT: $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mathbf{E}\xi_i = \mu$, $\mathbf{D}^2\xi_i = \sigma < \infty$ és $S_n = \xi_1 + \ldots \xi_n$, akkor

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \Rightarrow N(0,1)$$

Bizonyítás: A karakterisztikus függvény sorfejtését és a teleszkóp egyenlőtlenséget felhasználva be fogjuk látni a konvergenciát N(0,1) karakterisztikus függvényéhez, utána pedig már elég a folytonossági tételre hivatkozni. Mivel $\mathbf{E}(\xi - \mu) = 0$, ezért feltesszük, hogy $\mu = 0$ és csak $\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}$-t vizsgáljuk. Ennek megfelelően ha $\psi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_j}$, akkor a 4.fejezetbeli tétel 4. pontja szerint

$$\psi(t) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \beta(t), \text{ ahol } \frac{\beta(t)}{t^2} \to 0 \text{ amint t} \to 0$$

Ne feledjük el, hogy most $\mathbf{D}^2\xi = \mathbf{E}\xi^2$. A sorozat tagjainak karakterisztikus függvénye:

$$\mathbf{E}e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}} = \prod_{j=1}^{n} \mathbf{E}e^{it\frac{\xi_j}{\sqrt{n}\sigma}} = \left[\psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]^n$$

A következő lépés az, hogy megmutatjuk, hogy esetünkben elegendő a másodrendű sorfejtés. Ehhez használjuk fel a teleszkóp egyenlőtlenséget:

$$\left|\left[\psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]^n - \left[1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n\sigma^2}\right]^n\right| \le n\left|\psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)\right| \le$$

$$\le n\left|\beta\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right| = \frac{t^2}{\sigma^2}\frac{\beta\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)}{\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2} \to 0 \text{ ha } n \to \infty$$

Ez a másodrendű sorfejtés pedig nyilvánvalóan:

$$\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \to e^{-\frac{t^2}{2}} = \psi_{N(0,1)}(t)$$

Vegyük észre, hogy mivel N(0,1) abszolút folytonos eloszlás, ezért a gyenge konvergencia itt a pontonkénti konvergenciát is jelenti.

Még két további CHT-t mutatunk be, de nem lesz nehéz látni, hogy az egyik következik a másikból, ezért csak az elsőt kell bizonyítanunk.

Lindeberg CHT: $\xi_1, \xi_2, ...$ függetlenek, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $\mathbf{D}^2 = \sigma_i^2 < \infty$ és legyen $\Sigma_n^2 = \sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2 = \mathbf{D}^2 S_n$. Ekkor ha

$$\frac{1}{\Sigma_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|>\epsilon\Sigma_n} x^2 dF_j(x) \to 0 \qquad \forall\epsilon > 0$$

akkor

$$\frac{S_n}{\Sigma_n} \Rightarrow N(0,1)$$

Megjegyzés: A tételnek igaz a megfordítása is. Ha

$$\frac{S_n}{\Sigma_n} \Rightarrow N(0,1) \text{ és } \frac{\max_{j\leq n}\sigma_j}{\Sigma_n} \to 0$$

akkor ezekből a feltétel következik (Feller-tétel), de ezt nem bizonyítjuk. Maga a feltétel durván szólva azt fejezi ki, hogy ha bármilyen $\Sigma_n - nel$ arányos nagyságú intervallumot kizárunk a szórásnégyzetek kiszámításánál, akkor ezek összegénél Σ_n már sokkal nagyobb lesz. Másképp, "elegendő" valószínűségi súly van az egyes változóknál a nulla körüli (a lényeg, hogy véges), bármilyen kis mértékben is de Σ_n-nel lineárisan növő intervallumokban.

Bizonyítás: Legyen megint $\psi_j(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_j}$, és így

$$\mathbf{E}e^{it\frac{S_n}{\Sigma_n}} = \prod_{j=1}^{n}\psi_j\left(\frac{t}{\Sigma_n}\right)$$

Most először ismét azt mutatjuk meg, hogy elegendő a másodrendű sorfejtés, azonban most nem azonos eloszlású változóink vannak, ezért első körben külön becslünk minden j-re a 4. fejezetbeli tétel 1. pontja segítségével (az n! ill. (n+1)! elhagyása a becslésbe belefér):

$$\left|\psi_j\left(\frac{t}{\Sigma_n}\right) - \left(1 - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2\Sigma_n^2}\right)\right| \leq \mathbf{E}min\left[\left(\frac{t\xi_j}{\Sigma_n}\right)^2, \left|\frac{t\xi_j}{\Sigma_n}\right|^3\right] =$$

$$= \int \min\left[\left(\frac{tx}{\Sigma_n}\right)^2, \left|\frac{tx}{\Sigma_n}\right|^3\right] dF_j(x) \leq$$

$$\leq \int_{|x|\leq\epsilon\Sigma_n}\left|\frac{tx}{\Sigma_n}\right|^3 dF_j(x) + \int_{|x|>\epsilon\Sigma_n}\left(\frac{tx}{\Sigma_n}\right)^2 dF_j(x) \leq$$

a minimum definíciója miatt. Tovább írva, ha az első integrálban az egyik x-re alkalmazzuk a becslést:

$$\leq |t|^3\frac{\epsilon\Sigma_n}{\Sigma_n^3}\underbrace{\int_{|x|\leq\epsilon\Sigma_n} x^2 dF_j(x)}_{\leq\sigma_j^2} + \frac{|t|^2}{\Sigma_n^2}\int_{|x|\geq\epsilon\Sigma_n} x^2 dF_j(x)$$

Most ezt és a teleszkóp egyenlőtlenséget felhasználva megmutatjuk, a teljes karakterisztikus függvényre, hogy a közelítés elégséges:

$$\left|\prod_{j=1}^{n}\psi_j\left(\frac{t}{\Sigma_n}\right) - \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2\Sigma_n^2}\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\left|\psi_j\left(\frac{t}{\Sigma_n}\right) - \left(1 - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2\Sigma_n^2}\right)\right| \leq$$

$$\leq \epsilon|t|^3 \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}{\Sigma_n^2}}_{=1} + t^2 \frac{1}{\Sigma_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|x|\geq \epsilon\Sigma_n} x^2 dF_j(x)$$

ahol a második tagban éppen a tétel feltételében szereplő kifejezést láthatjuk, amely eszerint 0-hoz tart, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \left| \prod_{j=1}^n \psi_j\left(\frac{t}{\Sigma_n}\right) - \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2\Sigma_n^2}\right) \right| = 0$$

(Elvileg csak a limsup, de mivel az egész kifejezés nemnegatív, ezért a lim is.) Végül megmutatjuk, hogy ez a közelítés tart a standard normális karakterisztikus függvényéhez. Ehhez két dolgot fogunk felhasználni. Az egyik az $|x| \leq \frac{1}{2}$ esetén sima Taylor-sorfejtésből adódó

$$|e^x - (1-x)| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^k}{2} = \frac{1}{2}|x|^2 \frac{1}{1-|x|} \leq x^2$$

a másik pedig az, hogy aszimptotikusan mindegyik szórásnégyzet végtelenül kicsi a teljes szórásnégyzethez képest. Ezt úgy láthatjuk be, hogy

$$\sigma_j^2 = \underbrace{\int_{|x|\leq \epsilon\Sigma_n} x^2 dF_j(x)}_{\leq \epsilon^2\Sigma_n^2} + \int_{|x|>\epsilon\Sigma_n} x^2 dF_j(x)$$

és így

$$\frac{\max_{j\leq n}\{\sigma_j^2\}}{\Sigma_n^2} \leq \epsilon^2 + \frac{1}{\Sigma_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|x|\geq \epsilon\Sigma_n} x^2 dF_j(x)$$

tehát ugyanúgy mint az előbb $\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{j\leq n}\{\sigma_j^2\}}{\Sigma_n^2} = 0$ Ezekkel pedig ismét a teleszkóp egyenlőtlenséget használva:

$$\left| \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2\Sigma_n^2}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \left| \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2\Sigma_n^2}\right) - \prod_{j=1}^n e^{-\frac{\sigma_j^2 t^2}{2\Sigma_n^2}} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \left| e^{-\frac{t^2\sigma_j^2}{2\Sigma_n^2}} - \left(1 - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2\Sigma_n^2}\right) \right| \leq \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j^4 t^4}{4\Sigma_n^4} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\Sigma_n^2} \max_{j\leq n}\{\sigma_j^2\} \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j^2}{\Sigma_n^2}}_{=1} t^4 \to 0$$

mivel elég nagy n-re $\frac{\sigma_j^2 t^2}{2\Sigma_n^2} \leq \frac{1}{2}$

Mint azt említettük, a következő CHT könnyen visszavezethető az előzőre:

Lyapunov-CHT: Ha $\xi_1, \xi_2 ...$ függetlenek és $\mathbf{E}|\xi_j|^3 < \infty$ $\forall j$-re, S_n, Σ_n ugyanazok, mint előbb és

$$\frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{E}|\xi_j|^3}{\Sigma_n^3} \to 0$$

akkor

$$\frac{S_n}{\Sigma_n} \Rightarrow N(0,1)$$

Bizonyítás: Azt mutatjuk meg, hogy a Lyapunov-feltétel teljesülése esetén teljesül a Lindeberg-feltétel is.

$$\frac{1}{\Sigma_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|x|>\epsilon\Sigma_n} x^2 dF_j(x) \leq \frac{1}{\Sigma_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|x|>\epsilon\Sigma_n} x^2 \frac{|x|}{\epsilon\Sigma_n} dF_j(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Sigma_n^3} \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}|\xi_j|^3 \to 0 \qquad \forall \epsilon > 0$$

(ϵ most fix!)

6. A Borel-Cantelli lemma

A Borel-Cantelli lemma egy meglehetősen gyakran használt eredménye a valószínűségszámításnak, mi is sokszor fogjuk használni a következő fejezetekben.

Definíció: Ha $\{A_n\}_{n\geq 1}$ eseményrendszer, akkor

- $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^\infty \cup_{k=n}^\infty A_k$
- $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^\infty \cap_{k=n}^\infty A_k$

Elsőre talán nehéz látni, de alapos végiggondolás után adódik, hogy $\limsup_{n\to\infty} A_n$ az az esemény, hogy az A_n események közül végtelen sok következik be, míg $\liminf_{n\to\infty} A_n$ az, hogy véges sok kivétellel az összes bekövetkezik. A gondolatmenetet a limsup esetében mutatjuk be. Ha $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ akkor $\omega \in \cup_{k=n}^\infty A_k$ $\forall n$-re. Ha viszont volna olyan K index, hogy $k > K$ esetén $\omega \notin A_k$ akkor $\omega \notin \cup_{k=K+1}^\infty A_k$ is igaz lenne, tehát ilyen K nem létezik. A liminf-re vonatkozó megfontolást az olvasóra hagyjuk. Egyszerűen adódik, hogy

$$\overline{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \overline{\cap_{n=1}^\infty \cup_{k=n}^\infty A_k} = \cup_{n=1}^\infty \cap_{k=n}^\infty \overline{A_k} = \liminf_{n\to\infty} \overline{A_n}$$

ez utóbbi pedig az az esemény, hogy csak véges sok A_n következik be.

Lemma: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mértéktér, $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ eseménysorozat és $\mathbf{P}(A_n) = p_n$. Ekkor

1. $\sum_{n=1}^\infty p_n < \infty \Rightarrow \mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$
2. Ha az A_n események teljesen független eseményrendszert alkotnak, $\sum_{n=1}^\infty p_n = \infty \Rightarrow \mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$

Bizonyítás :

1. Mivel $\cup_{k=n}^{\infty} A_k$ szűkülő halmazsorozat,

$$\mathbf{P}\big(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k\big) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\cup_{k=n}^{\infty} A_k\big) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_n = 0$$

2. Mivel $A_1, ...A_n, ...$ függetlenek, ezért a komplementereik is, így

$$\mathbf{P}(\cap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k) = \prod_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(\overline{A}_k)$$

Logaritmust véve és felhasználva, hogy $x < 1$ esetén $ln(1-x) \leq -x$

$$\sum_{k=n}^{\infty} ln\mathbf{P}(\overline{A}_k) = \sum_{k=n}^{\infty} ln\big[1 - \mathbf{P}(A_k)\big] \leq -\sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(\overline{A}) = -\infty$$

Mindkét oldalt e-adra emelve (a korrekt eljárás persze az, hogy csak a végén végezzük el a határátmenetet, de a helyzet egyértelmű, úgyhogy kényelmesek voltunk):

$$\mathbf{P}(\cap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k) = 0 \qquad \forall n - re$$

így

$$\mathbf{P}(\liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n) = \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\cap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k) = 0$$

amiből $\mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1 - \mathbf{P}(\liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n) = 1$

7. Konvergenciatípusok

8. Nagy számok erős törvényei

9. Az iterált logaritmus tétel

10. Stabilis eloszlások

11. Függelék