Valószínűségszámítás 3. 2010/11 1. félév
Dr. Szász Domokos
2. feladatsor
Borel–Cantelli-lemma és a nagy számok erős törvénye. II.

2.1. (a) Legyenek $X, X_1, X_2, X_3, \ldots$ tetszőleges valószínűségi változók. Állítás: $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X)$ csakkor, ha $\forall\varepsilon > 0$-ra $lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\sup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon) = 0$

(b) Ha $\forall\varepsilon > 0$-ra $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$, akkor $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$.

6

2.2. (Kolmogorov-Hincsin kritérium)
Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független valószínűségi változók és legyen $EX_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Ha $\sum_n D^2X_n < \infty$, akkor $P(\ \sum_n X_n$ konvergál $) = 1$.

2.3. Legyen a $[0, 1]$ intevallumba eső x valós szám diadikus előállítása $x = (0, \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \varepsilon_3(x), \ldots)$. A Rademacher-függvények definiciója: $r_n(x) = 2\varepsilon_n(x) - 1$. Legyenek $X_n(x) = a_n r_n(x)$ valószínűségi változók (függvények) a $[0, 1]$ intervallumon. Mutassuk meg, hogy ha $\sum_n a_n^2 < \infty$, akkor $P(\ \sum_n X_n$ konvergál $) = 1$.

2.4. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független valószínűségi változók, amelyek a $-n^4, 0, n^4$ értékeket veszik fel rendre $n^{-2}, 1-2n^{-2}, n^{-2}$ valószínűségekkel. Mutassuk meg, hogy $P(\ \sum_n X_n$ konvergál $) = 1$.

2.5. Legyenek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen vektorok $\mathbb{R}^d$-ben, nevezetesen

$$\mathbf{P}(\varepsilon_j = \pm e_k) = \frac{1}{2d} \qquad (k = 1, 2, \ldots, d)$$

Vezessük be az $S_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$ jelölést.

(a) Mutassuk meg, hogy $d = 2$ esetén

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\pi n} \qquad n \to \infty$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy $d = 2$ esetén

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0 \text{ végtelen sok } n\text{-re}) = 1$$

(c) Mennyi a

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0 \text{ végtelen sok } n\text{-re})$$

valószínűség $d = 3$ esetén?

2.6. (Két aritmetikai lemma)

(a) (Toeplitz) Ha $a_n \geq 0$, $b_n = \sum_1^n a_j$, $\sum_1^{\infty} a_n = \infty$, és $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_1^n a_j x_j}{b_n} = x$$

(b) (Kronecker) Ha $0 < a_1 \le a_2 \le \dots, \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ és $\sum x_n = s$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_1^n a_j x_j}{a_n} = 0$$

2.7. (Kolmogorov-féle kétsor tétel) Legyenek $Y_1, \dots, Y_n, \dots$ független valószínűségi változók. A $\sum Y_n$ sor konvergál 1 valószínűséggel, ha konvergál a következő két sor mindegyike:

$$\sum EY_n \qquad \sum D^2 Y_n$$

(Megjegyzés: Ha $\exists K > 0$, hogy $\mathbf{P}(|X_n| \le K) = 1$, akkor a fenti feltétel elégséges is.)

2.8. (Kolmogorov-féle háromsor tétel)

Legyenek $Y_1, \dots, Y_n, \dots$ független valószínűségi változók. A $\sum Y_n$ sor akkor és csak akkor konvergál 1 valószínűséggel, ha van $c > 0$, hogy a következő három sor mindegyike konvergál

$$\sum P(|Y_n| \ge c) \qquad \sum D^2 Y_n^c \qquad \sum EY_n^c$$

ahol $Y_n^c = Y_n . \chi_{\{|Y_n| \le c\}}$ ($\chi_{\{A\}}$ az A indikátora).

2.9. Mutassuk meg, hogy az $\{X_n\}$ valószínűségi változó sorozat akkor és csak akkor konvergál sztochasztikusan az X valószínűségi változóhoz, ha minden $\{X_{n_k}\}$ részsorozatából kiválasztható további $\{X_{n_{k(j)}}\}$ részsorozat, hogy az 1 valószínűséggel konvergál az X valószínűségi változóhoz.

(*Ötlet: Válasszuk az $\{X_{n_k}\}$ részsorozathoz $n_k(j)$-t úgy, hogy $\forall k \le k(j)$-re*

$$P(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{j}) \ge \frac{1}{2^j},$$

és alkalmazzuk a Borel-Cantelli lemmát.)

2.10. Legyenek $Y_1, \dots, Y_n, \dots$ független valószínűségi változók, $D^2 Y_n = \sigma_n^2 < \infty$ végül $S_n = \sum_1^n Y_j$. Ha pozitív számok valamely $\{B_n \nearrow \infty\}$ sorozatára

$$\sum \frac{D^2 Y_n}{B_n^2} < \infty$$

akkor

$$P(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{B_n} \to 0) = 1$$

2.11. A $T_1, T_2, \dots$ időpontokban katasztrófák következnek be, ahol $T_j = X_1 + X_2 + \dots X_j$ és $X_1, X_2, X_3, \dots$ független és azonos eloszlású pozitív valószínűségi változók. Legyen $N(t) = \max\{n : T_n \le t\}$ a t időpont előtt bekövetkezett katasztófák száma. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{E}X_1 < \infty$ és $t \to \infty$, akkor $N(t) \to \infty$ valamint $N(t)/t \to 1/\mathbf{E}X_1$ majdnem biztosan.

2.12. Mutassuk meg, hogy ha $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $P(\varepsilon_j = \pm 1) = 1/2$, $S_n = \sum_1^n \varepsilon_j$, akkor

$$P(\frac{S_n}{\sqrt{n}\log n} \to 0) = 1.$$

2.13. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}X^2 < \infty$ akkor és csak akkor, ha $\sum_{n=1}^{\infty} nP(|X| > n) < \infty$.

2.14. Ha $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, akkor

(a) ha $|Y_1|^\alpha < \infty$ valamely $0 < \alpha < 1$-ra, akkor $P(\frac{S_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \to 0) = 1$

(b) ha $|Y_1|^\alpha < \infty$ valamely $1 < \alpha < 2$-ra, akkor $P(\frac{S_n - n\mathbb{E}Y_1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \to 0) = 1$

2.15. Ha $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és $\mathbb{E}|Y_1| = \infty$, akkor az A_n konstansok tetszőleges sorozatára $P(\limsup_n |\frac{S_n}{n} - A_n| = \infty) = 1$.