Valószínűségszámítás 3. 2010/11 1. félév
Dr. Szász Domokos
6. feladatsor
Karakterisztikus függvények.

6.1. Olyan $\psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket tekintünk, amelyekre $\psi(0) = 1$, $\forall t$-re $\psi(t) \geq 0$ és $\psi(-t) = \psi(t)$.

(a) Tegyük fel, hogy $d_1, d_2, \ldots > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \infty$, $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq 0$, $\lim_{k\to\infty} s_k = 0$, és végül $\sum_{k=1}^{\infty} s_k d_k = 1$. A pozitív tengelyen legyen $\psi(t)$ gráfja konvex töröttvonal, ahol az egymás utáni oldalak iránytangensei: $-s_1, -s_2, \ldots$ és a t-tengelyre vett vetületek hosszai $d_1, d_2, \ldots$. Tehát ψ értéke a $t_k = d_1 + \ldots + d_k$ pontban $1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j d_j$. (Ha $s_n = 0$, akkor a töröttvonalnak csak n éle van.) Igazoljuk, hogy $\psi(t)$ karakterisztikus függvény.

(b) Konstruáljunk olyan karakterisztikus függvényt, amely nem integrálható.

(c) Pólya tétele: Legyen ψ páros, folytonos és konvex $[0, \infty)$-en, és legyen $\psi(0) = 1$. Igazoljuk, hogy ψ karakterisztikus függvény.

(d) Mutassunk két különböző karakterisztikus függvényt: $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$, melyekre $\psi_1(t) = \psi_2(t)$ valamely véges $[-a, a]$ intervallumon.

(e) Adjunk példát olyan $F_1 \neq F_2$, G eloszlásokra, hogy $F_1 * G = F_2 * G$.

6.2. Bizonyítsuk be, hogy ha az F_n, F, G_n, G eloszlásfüggvényekre $F_n \Rightarrow F$ és $G_n \Rightarrow G$, akkor $F_n * G_n \Rightarrow F * G$.
(Igazoljuk most a 3. feladatlap 11. feladatának állítását a karakterisztikus függvények módszerével is.)

6.3. Mutassuk meg a karakterisztikus függvények módszerével, hogy

(a) $\mathrm{B}(n, p_n) \Rightarrow \mathrm{POI}(\lambda)$ ahogy $n \to \infty$, ha $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$,

(b) ha ν_n $\mathrm{GEO}(\frac{\lambda}{n})$ eloszlású ($n > \lambda$) akkor $\frac{1}{n}\nu_n \to \mathrm{EXP}(\lambda)$.

6.4. Milyen eloszlások karakterisztikus függvényei a következő függvények:

$$\cos t, \quad \cos^2 t, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt, \text{ahol } \ a_k \geq 0 \ \text{ és } \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$$

6.5. Az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek és azonos $EXP(\lambda)$ eloszlásúak. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X_1 + \ldots X_n)^k$-t , ha $k, n = 1, 2, \ldots$.

6.6. Mutassuk meg, hogy ha az X v.v. f sűrűségének az f' deriváltja integrálható, akkor $\psi(t) = o(t^{-1})$ midőn $|t| \to \infty$. Általánosítsuk magasabb deriviáltakra!

6.7. (a) Mutassuk meg, hogy $F_n \Rightarrow F$-ből következik, hogy a ψ_n karakterisztikus függvények egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, azaz $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$, hogy $\forall n$-re $|\psi_n(s) - \psi_n(t)| < \varepsilon$, hacsak $|s - t| < \delta$.

(b) Mutassuk meg, hogy $F_n \Rightarrow F$-ból következik, hogy $\psi_n(t) \to \psi(t)$ kompakt halmazokon egyenletesen.

(c) Igazoljuk, hogy a konvergencia nem szükségszerűen egyenletes $\mathbb{R}$-en.

6.8. (6. 1. folytatás) Mutassunk példát két különböző valós karakterisztikus függvényre: $\psi_1 \neq \psi_2$, hogy $\forall t$-re $|\psi_1(t)| = |\psi_2(t)|$.

6.9. Legyenek X és Y független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mathbf{E}(X) = 0$, $\mathbf{D}^2(X) = 1$. Mutassuk meg, hogy ha $\frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ eloszlása megegyezik X eloszlásával, akkor X és Y normális eloszlásúak.

6.10. A X valószínűségi változó egész értékeket vesz fel, és $\mathbb{E}e^{iXt} = \psi(t)$. Mennyi

(a)
$$\mathbb{P}(X \equiv 0) \pmod{k};$$

(b)
$$\mathbb{P}(X \equiv m) \pmod{k}.$$