Valószínűségszámítás II. 2002 tavaszi félév

Amire feltétlenül szükség van:

Fogalmak: Algebra, σ-algebra, generált σ-algebra
(valószínűségi) mérték (algebrán)
(valószínűségi) mérték (σ-algebrán)
mérték felülről (alulról) való folytonossága
Borel σ-algebra
Lebesgue σ-algebra, Lebesgue-mérték
Lebesgue-integrál

Kiterjesztési tétel: Algebrán adott mértéknek létezik egyértelmű kiterjesztése a generált σ-algebrára.

Approximációs tétel: Ha $\mathcal{S}$ félgyűrű, μ mérték $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$-en, és μ σ-véges $\mathcal{S}$-en, akkor

(i) Ha $B \in \mathcal{A}$ és $\varepsilon > 0$, $\exists$ véges vagy megszámlálható diszjunkt $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$, hogy $B \subset \bigcup A_k$ és $\mu(\bigcup A_k \setminus B) < \varepsilon$

(ii) Ha $B \in \mathcal{A}$ és $\varepsilon > 0$, $\exists$ véges sok, diszjunkt $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, hogy $\mu(B \circ (\bigcup_{i}^{n} A_k)) < \varepsilon$

Egyenlőtlenségek: Jensen, Schwartz, Hölder

Integrálok határértéke: Alapfeltevés: $\lim_n X_n = X \quad \mu$-m.m.

Kis Lebesgue: Ha μ véges, és az X_n-ek egyenletesen korlátosak, akkor: $\int X \mathrm{d}\mu = \lim_n \int X_n \mathrm{d}\mu$

Monoton konvergencia tétel: Ha $0 \leq X_n \nearrow X$ μ-m.m. akkor

$$\int X_n \mathrm{d}\mu \nearrow \int X \mathrm{d}\mu$$

Lebesgue dominált konvengencia tétele: Ha $|X_n| \leq Y$ μ-m.m. és Y integrálható, akkor X_n és X is integrálható, és

$$\lim_{n\to\infty} \int X_n \mathrm{d}\mu = \int X \mathrm{d}\mu.$$

Radon–Nikodym tétel Ha μ és ν σ-véges mértékek, és $\nu \ll \mu$ (azaz ν abszolut folytonos μ-re) akkor $\exists f \geq 0$, hogy $\forall A \in \mathcal{A}$-ra

$$\nu(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu$$

Ha f és g két ilyen sűrűség, akkor $\mu(f \neq g) = 0$.