1. Tegyük fel, hogy $A \geq 0$, $B \geq 0$ mátrixok felcserélhetők. Igaz-e, hogy ekkor $AB \geq 0$?

2. Bizonyítsd be a következő tételt (Cauchy interlacing theorem): Ha
$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$
egy $n \times n$ komplex blokkmátrix, ahol B egy $(n-k) \times (n-k)$ mátrix, akkor A és B sajátértékei összefűzhetők az alábbi módon:
$$\lambda_j^{\downarrow}(A) \geq \lambda_j^{\downarrow}(B) \geq \lambda_{j+k}^{\downarrow}(A),$$
$j = 1, 2, \ldots, n-k$. (Tipp: Vegyünk egy B néhány sajátvektora által generált alteret, és vizsgáljuk ezen az altéren az $\langle x, Ax \rangle$ minimumát!)

3. Bizonyítsuk be a következőt (von Neumann mean ergodic theorem): Tetszőleges U unitér mátrixra
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} U^i = \mathrm{Proj}(\mathrm{Ker}(U-I))$$
(Tipp: Keressük meg $\mathrm{Ker}(U-I)$ merőleges kiegésztőjét, és vizsgáljuk meg a baloldali kifejezés hatását ezen a két téren!)

4. Bizonyítsd be, hogy ha P és Q projekciók, akkor a következők ekvivalensek:
   (i) $P \leq Q$
   (ii) $\mathrm{Ran}\, P \subseteq \mathrm{Ran}\, Q$
   (iii) $PQ = P = QP$

5. Bizonyítsd be, hogy ha P és Q projekciók, akkor a következők ekvivalensek:
   (i) $P \perp Q$
   (ii) $PQ = 0 = QP$
   (iii) $P + Q$ projekció
   (iv) $\langle P, Q \rangle_{HS} = 0$

6. Adjunk példát A és B mátrixokra, hogy $e^A e^B$, $e^B e^A$ és e^{A+B} mind különbözők!

7. Adjunk példát A és B mátrixokra, hogy $AB \neq BA$, de mégis $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$!

8. Adjunk példát A és B mátrixokra, hogy $e^A e^B = e^B e^A \neq e^{A+B}$!

9. Adjunk példát A és B mátrixokra, hogy $e^A e^B \neq e^B e^A = e^{A+B}$!

10. Legyenek $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a Pauli mátrixok. Ha $v \in \mathbb{R}^3$, akkor képezhetjük a $v \cdot \sigma = \sum v_i \sigma_i$ mátrixot. Lássuk be, hogy
$$(v \cdot \sigma)(u \cdot \sigma) = \langle v, u \rangle I + \mathrm{i}(v \times u) \cdot \sigma$$

11. Az előző feladat jelöléseivel határozzuk meg az $e^{\mathrm{i}(v \cdot \sigma)}$ mátrixot!

12. Bizonyítsuk, hogy a Golden-Thompson-Lieb egyenlőtlenség implikálja a Golden-Thompson egyenlőtlenséget!

13. Lássuk be, hogy ha B és C felcserélhető önadjungált mátrixok, és A önadjungált, akkor $\mathrm{Tr}\, e^{A+B+C} \leq \mathrm{Tr}\, e^A e^B e^C$!

14. Bizonyítsuk, hogy minden A és B négyzetes, de nem feltétlen azonos méretü mátrixokhoz és f A és B spektrumán kellőképpen reguláris függvényhez létezik egy $p_{A,B}$ polinom, melyre $f(A) = p_{A,B}(A)$ és $f(B) = p_{A,B}(B)$ egyaránt teljesülnek.

15. Igazoljuk, hogy $Af(BA) = f(AB)A$ teljesül minden olyan A és B nem feltétlenül négyzetes mátrixokra, melyekre a kijelölt műveletek értelmesek.

16. Legyenek f,A és B olyanok, mint az előző feladatban, $\alpha \in \mathbb{C}$, továbbá tegyük fel, hogy létezik $(BA)^{-1}$. Mutassuk meg, hogy ekkor
$$f(\alpha I + AB) = f(\alpha)I + A(BA)^{-1} \left(f(\alpha I + BA) - f(\alpha)I\right) B$$
Figyelem, a képletben két különböző méretű I is szerepel!

17. Legyenek $u, v, x, y \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Számítsuk ki $f(\alpha I + |u\rangle\langle v| + |x\rangle\langle y|)$ értékét!