Kettős és többes integrálok

1) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ kettős integrálja az $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$ tartományon

Megoldás:

$$\int_0^3 \int_0^2 2x^2 + 3xy + 4y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}y + 4xy^2\right]_1^2 \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{16}{3} + 6y + 8y^2 - \frac{2}{3} - \frac{3}{2}y - 4y^2\right] \mathrm{d}y = \int_0^3 4y^2 + \frac{9}{2}y + \frac{14}{3}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left[\frac{4}{3}y^3 + \frac{9}{4}y^2 + \frac{14}{3}y\right]_0^3 = \frac{108}{3} + \frac{81}{4} + \frac{42}{3} = \frac{432 + 234 + 168}{12} = \frac{843}{12} = 70{,}25$$

2) $f(x,y) = xy\sin\left(x^2+y^2\right)$ integrálja a $0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $0 \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ tartományon

Megoldás:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} xy\sin\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} -\frac{1}{2}y\left[\cos\left(x^2+y^2\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} -\frac{1}{2}y\cos\left(x^2+y^2\right) + \frac{1}{2}y\cos y^2\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+y^2\right)\,\mathrm{d}y +$$

$$+ \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{2}y\cos y^2\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}+y^2\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + \left[\frac{1}{4}\sin y^2\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3) $f(x,y) = e^{x+y}$ integrálja az $1 \le x \le 4$, $1 \le y \le 2$ tartományon

Megoldás:

$$\int_1^2 \int_1^4 e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 e^y\,\mathrm{d}y \int_1^4 e^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[e^y\right]_1^2\left[e^x\right]_1^4 = \left(e^2 - e\right)\left(e^4 - e\right) = e^6 - e^5 - e^3 + e^2 =$$

$$= e^2\left(e^4 - e^3 - e + 1\right) = 242{,}3191534$$

4) $f(x,y) = x^2 + y$ integrálja az $y^2 \le x \le \sqrt{y}$, $0 \le y \le 1$ tartományon

Megoldás:

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + xy \right)_{y^2}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{y^6}{3} + y^{\frac{3}{2}} - y^3 \,\mathrm{d}y =$$

$$= \left[\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{15} - \frac{y^7}{21} + \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{15} - \frac{1}{21} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{99}{420} = \frac{33}{140}$$

5) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$ integrálja a $0 \le x \le y$, $0 \le x \le 1$ tartományon

Megoldás:

A módszer: y szerinti integrálás (határozatlan integrál).

$$\int 2x\sqrt{1 - \frac{y^2}{4x^2}} \,\mathrm{d}y = 2x \int \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2x}\right)^2} \,\mathrm{d}y \overset{*}{=}$$

Helyettesítéses integrál:

$$\frac{y}{2x} = \sin u \to \cos u = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2x}\right)^2}, \;\; \mathrm{d}y = 2x \cos u \,\mathrm{d}u$$

A csillagos egyenletet tovább alakítva:

$$\overset{*}{=} 4x^2 \int \cos^2 u \,\mathrm{d}u = 4x^2 \int \frac{1 + \cos 2u}{2} \,\mathrm{d}u = 4x^2 \left(\frac{4}{2} + \frac{1}{4} \sin 2u \right) \overset{**}{=}$$

A visszahelyettesítés:

$$u = \arcsin \frac{y}{2x},$$

valamint

$$\frac{1}{4} \sin 2u = \frac{1}{2} \sin u \cos u = \frac{1}{2} \frac{y}{2x} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2x}\right)^2}$$

Ezzel a két csillagos egyenlet:

$$\overset{**}{=} \left[4x^2 \left(\frac{1}{2} \mathrm{arc\,sin} \frac{y}{2x} \right) + 4x^2 \left(\frac{1}{2} \frac{y}{2x} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2x}\right)^2} \right) \right]_0^x =$$

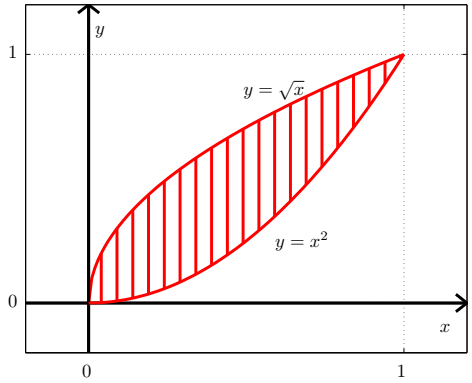
$$= 2x^2 \underbrace{\arcsin \frac{1}{2}}_{\frac{\pi}{6}} + x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{x^3}{3}\pi + x^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Az integrál ezzel:

$$\frac{\pi}{3} \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Határozzuk meg az alábbi függvények kettős integrálját a rajzban megadott (piros vonallal körbezárt) tartományon kétszeres integrálással!

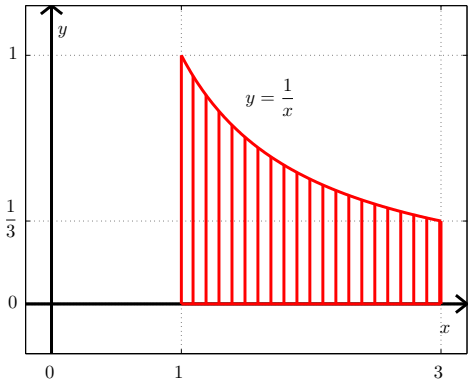
6) $f(x,y) = x^2 + y^2$



$$\int_0^1 \int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \left(x^2 + y^2\right) \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 -x^4 - \frac{x^6}{3} + x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{3 \cdot 5}\right]_0^1 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{21} + \frac{2}{7} + \frac{2}{15} = \frac{6}{35}$$

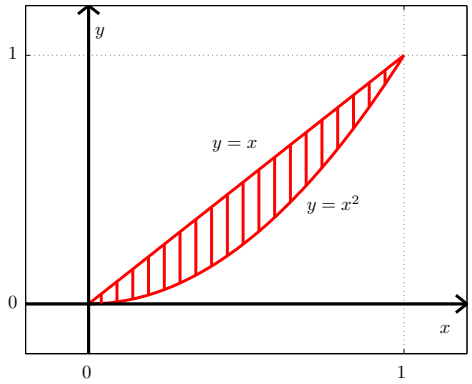
7) $f(x,y) = 2y + x + 2$



$$\int_1^3 \int_0^{\frac{1}{x}} (2y + x + 2)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_1^3 \left[y^2 + xy - 2y\right]_0^{\frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x = \int_1^3 \left(x^{-2} + 1 + 2x^{-1}\right)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \left[-x^{-1} + x + 2\ln x\right]_1^3 = -\frac{1}{3} + 3 + 2\ln 3 = \frac{8}{3} + 2\ln 3 = 4{,}863$$

8) $f(x, y) = xe^y$



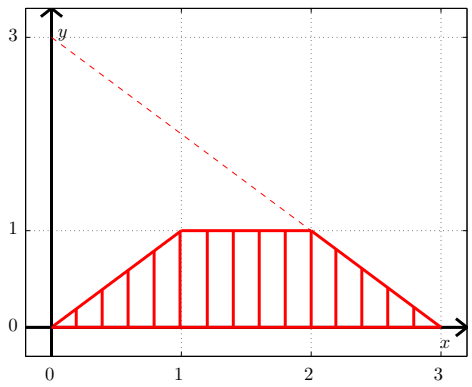
$$\int_0^1 \int_{y=x^2}^{x} xe^y\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int \left[xe^y\right]_{x^2}^{x}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 xe^x - xe^{x^2}\, \mathrm{d}x \overset{*}{=} \left[\left(x - 1e^x - \frac{1}{2}e^{x^2}\right)\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}e + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3 - e}{2}$$

A csillaggal jelölt átalakításhoz felhasználtuk az alábbi paricális integrált:

$$\int xe^x\, \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\, \mathrm{d}x = (x - 1)\, e^x$$

9) $f(x, y) = x^2 + y^2$



A területet három részterületre bontjuk. Az egyes területekre számolt integrálok:

$$\int_0^1 \int_{y=0}^{y=x} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^x \mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 + \frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{4x^3}{3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^4}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_1^2 \int_0^1 x^2 + y^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^1 \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x\right]_1^2 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\int_2^3 \int_0^{3-x} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{3-x} \mathrm{d}x = \int_2^3 x^2\,(3-x) + \frac{(3-x)^3}{3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{\left(3-x^4\right)}{12}\right]_2^3 = 27 - \frac{81}{4} - 0 - 8 + 4 + \frac{1}{12} =$$

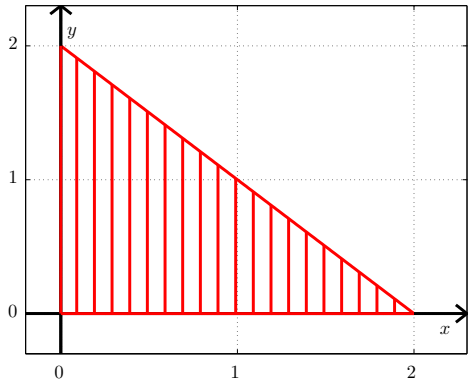
$$= \frac{17}{6}$$

A teljes integrál:

$$\frac{2}{6} + \frac{16}{6} + \frac{17}{6} = \frac{35}{6}$$

Határozzuk meg az alábbi függvények kettős integrálját egyenletük által megadott görbékkel határolt tartományon kétszeres integrálással!

10) $f\,(x,y) = x + y$, $T : x = 0;\ y = 0;\ x + y = 2$

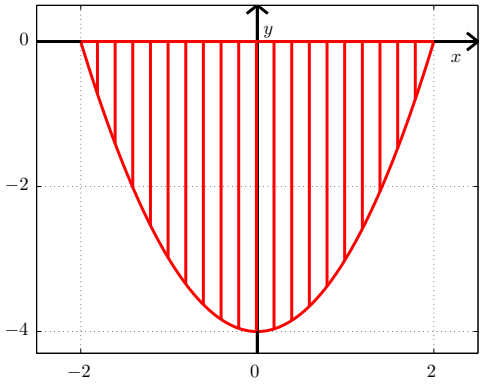


$$\int_0^2 \int_0^{2-x} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} \mathrm{d}x = \int_0^2 2x - x^2 + \frac{(2-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{(2-x)^3}{3\cdot 2}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} - 0 - 0 + 0 + \frac{8}{6} =$$

$$= \frac{12 - 8 + 4}{3} = \frac{8}{3}$$

11) $f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}x - y,\ T : y = x^2 - 4; y = 0$



$$\int_{-2}^2 \int_{x^2-4}^0 \left(1 + \frac{1}{2}x - y\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^2 \left[y + \frac{1}{2}xy - \frac{y^2}{2}\right]_{x^2-4}^0 \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^2 -\left(x^2-4\right) - \frac{1}{2}x\left(x^2-4\right) + \frac{\left(x^2-4\right)^2}{2}\,\mathrm{d}x =$$

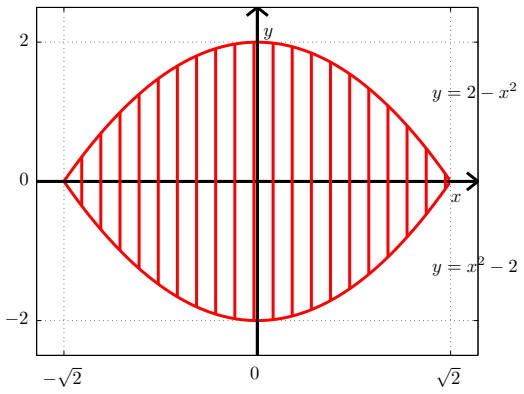
$$= \int_{-2}^2 \left(x^2-4\right)\left\{-1 - \frac{1}{2}x + \frac{x^2-4}{2}\right\}\mathrm{d}x = \int_{-2}^2 \frac{x^4 - 4x^2 - x^3 + 4x - 6x^2 + 24}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^2 \frac{x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 10\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 24x}{2}\right]_{-2}^2 =$$

$$= \frac{\frac{32}{5} - \frac{16}{4} - 10\cdot\frac{8}{3} + 8 + 48 + \frac{32}{5} + \frac{16}{4} - 10\cdot\frac{8}{3} - 8 + 48}{2} = \frac{\frac{64}{5} - \frac{160}{3} + 96}{2} =$$

$$= \frac{12{,}8 - 53{,}333 + 96}{2} = 27{,}733$$

12) $f(x,y) = 4 - y^2$, $T : y = 2 - x^2; y = x^2 - 2$



$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2-2}^{2-x^2} \left(4 - y^2\right) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \overset{*}{=}$$

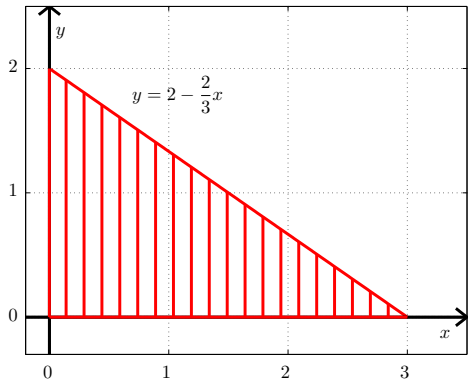
Az y szerint integrálva:

$$\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{x^2-2}^{2-x^2} = 4\left(2 - x^2\right) - \frac{\left(2 - x^2\right)^3}{3} - 4\left(x^2 - 2\right) + \frac{\left(x^2 - 2\right)^3}{3} =$$
$$= \frac{2}{3}\left(x^6 - 6x^4 + 16\right)$$

A csillagos egyenlet ezzel:

$$\overset{*}{=} \frac{2}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(x^6 - 6x^4 + 16\right) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[\frac{x^7}{7} - 6\frac{x^5}{5} + 16x\right] =$$
$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{2}\left(\frac{8}{7} - 6 \cdot \frac{4}{5} + 16\right) + \left(\frac{8}{7} - 6 \cdot \frac{4}{5} + 16\right)\right] = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{864}{35} = \frac{576\sqrt{2}}{35}$$

13) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $T : (0,0), (3,0), (0,2)$ csúcsokkal rendelkező háromszög



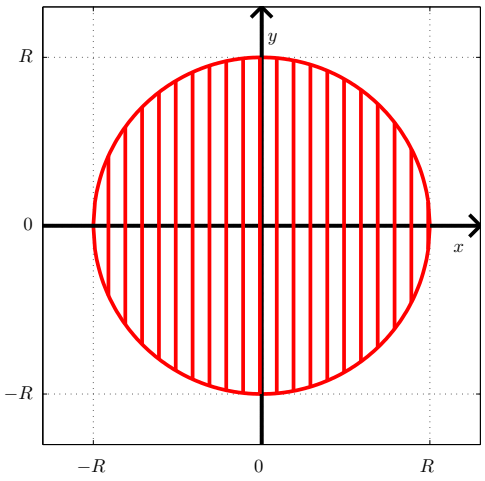
$$\int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{2-\frac{2}{3}x} \mathrm{d}x = \int_0^3 x^2\left(2 - \frac{2}{3}x\right) + \frac{\left(2-\frac{2}{3}x\right)^3}{3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \left(-\frac{62}{27}x^3 + \frac{78}{9}x^2 - \frac{24}{3}x + 8\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{62}{27}\frac{x^4}{4} + \frac{78}{9}\frac{x^3}{3} - \frac{24}{3}\frac{x^2}{2} + 8x\right]_0^3 = 6{,}5$$

14) Alakítsuk át az $\iint f(x,y)\,\mathrm{d}T$ kettős integrált kétszeres integrállá kétféleképpen, ha a T tartomány:

(a) A tartomány:



(1)

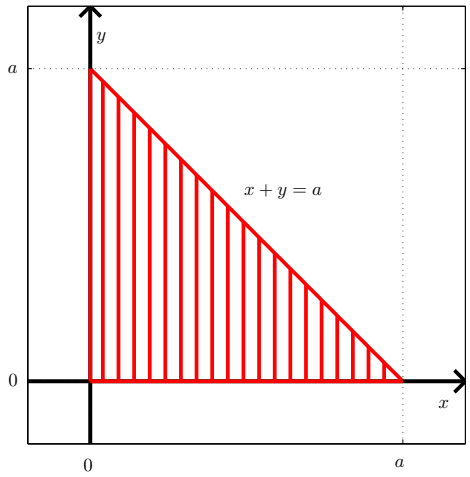
$$\iint\limits_{(T)} f(x,y)\ \mathrm{d}T = \int\limits_{-R}^{R}\ \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-R}^{R}\ \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R}\ \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

(2)

$$\iint f(x,y)\ \mathrm{d}T = \int\limits_{-R}^{R}\ \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(b) A tartomány:



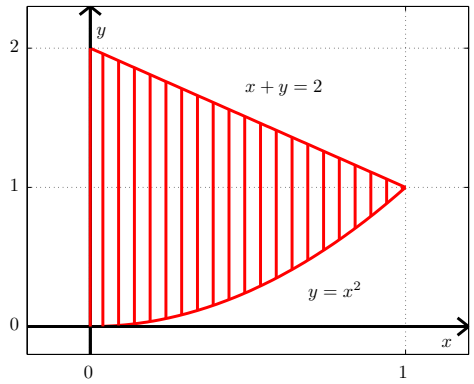
(1)

$$\iint f(x,y)\ \mathrm{d}T = \int\limits_{0}^{a}\ \int\limits_{0}^{a-x} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

(2)

$$\iint f(x,y)\ \mathrm{d}T = \int\limits_{0}^{a}\ \int\limits_{0}^{a-y} f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(c) A tartomány:



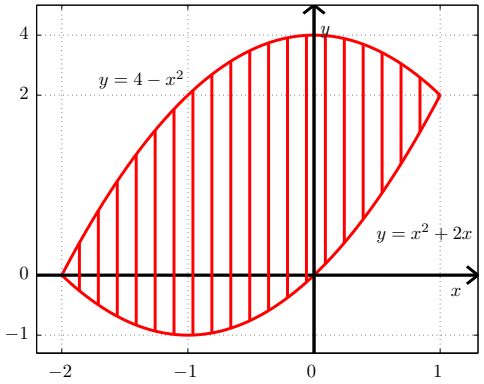
(1)

$$\iint f(x,y)\,\mathrm{d}T = \int_0^1 \int_{y=x^2}^{y=2-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

(2)

$$\iint f(x,y)\,\mathrm{d}T = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_0^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

15) Rajzoljuk fel az $\int_{-2}^{1} \int_{x^2+2x}^{4-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ integrál integrálási tartományát!



16) Meghatározandó a $z = xy$ függvény kettős integrálja a $P_1\,(1,1)$, $P_2\,(4,5)$, $P_3\,(4,2)$ pontok által meghatározott tartományban.

A P_1P_2 oldal egyenlete:

$$y - 1 = \frac{4}{3}\,(x-1) \text{ ill. } y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

A P_1P_3 oldal egyenlete:

$$y-1=\frac{1}{3}(x-1)\ \text{ill.}\ y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

A P_2P_3 oldal egyenlete: $x=4$.

$$\int_{x=1}^{4}\left\{\int_{y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}^{y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}} xy\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x=\int_{x=1}^{4}\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}^{y=\frac{4x}{3}-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=$$

$$=\int_1^4\frac{x}{2}\left[\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2\right]\mathrm{d}x=$$

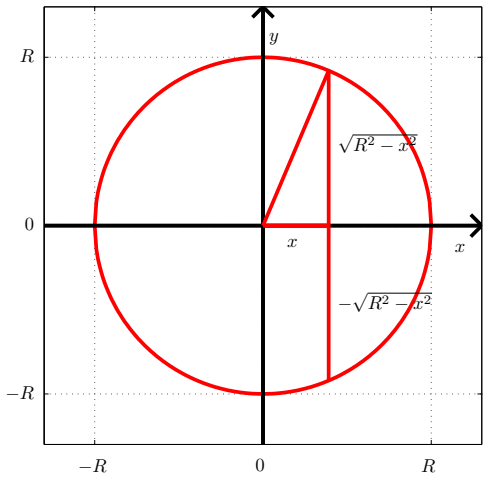
$$=\int_1^4\frac{x}{2}\left(\frac{16}{9}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{18}\int_1^4\left(15x^3-12x^2-3x\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{6}\int_1^4\left(5x^3-4x^2-x\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{5}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^4=\frac{1}{6}\left\{5\cdot4^3-\frac{4^4}{3}-\frac{16}{2}-\left(\frac{5}{4}-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}=37{,}875$$

17) Számítsuk ki kettős integrállal az R sugraú gömb térfogatát!



Az x-re és y-ra az integrálás határai: $-R \le x \le R$ és $-\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$. A gömb xy koordinátasík fölé eső részének térfogata:

$$\frac{V}{2} = \int_{x=-R}^{R} \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Az $R^2 - x^2 = k^2$ jelölés bevezetésével ez az integrál:

$$\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-k}^{k} \sqrt{k^2-y^2}\,\mathrm{d}y = k\int_{-k}^{k} \sqrt{1-\left(\frac{y}{k}\right)^2}\,\mathrm{d}y \overset{*}{=}$$

Az $\frac{y}{k} = \sin u$ helyettesítés alkalmazásával a határok, a $\mathrm{d}y$ és az intergrandus megváltozik:

$$y = k\sin u \Longrightarrow \begin{cases} y = -k\text{-ra } \sin u = -1 \to u = -\frac{\pi}{2} \\ y = +k\text{-ra } \sin u = 1 \to u = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\mathrm{d}y = k\cos u\,\mathrm{d}u$$

Ebből az integrálás:

$$\overset{*}{=} k\int_{-k}^{k} \sqrt{1-\left(\frac{y}{k}\right)^2}\,\mathrm{d}u = k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\,k\cos u\,\mathrm{d}u = k^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u =$$

$$= k^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{k^2}{2}\left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{k^2}{2}\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\frac{\pi}{2}}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)\right\} = k^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}k^2$$

Visszahelyettesítve a külső integrál:

$$\frac{V}{2} = \int_{-R}^{R} \frac{\pi}{2}\left(R^2-x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 - \frac{(-R)^3}{3}\right)\right\} = \frac{R^3\pi}{2}\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = \frac{R^3\pi}{2}\cdot\frac{4}{3}$$

Tehát a térfogat: $V = \dfrac{4R^3\pi}{3}$.

18) Számítsuk ki az R térfogatú gömb térfogatát úgy is, hogy polárkoordinátákra áttérünk!

A gömb egyenlete: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Az új koordináták: $x = r\cos\varphi$, és $y = r\sin\varphi$.

Az egyenlet az új koordinátákban: $z = \sqrt{R^2 - r^2}$.

A Jacobi-determináns:

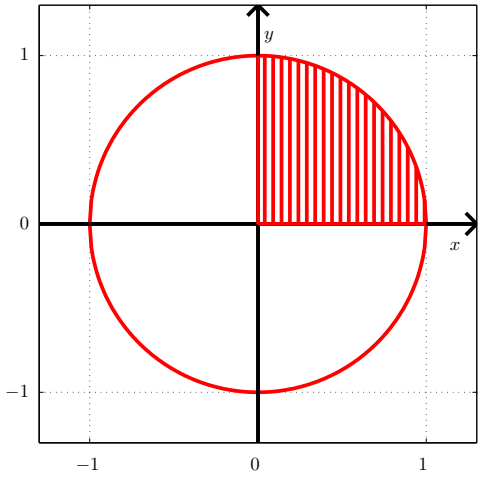
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Az integrálás mértéke: $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, és az új határok: $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$\frac{V}{2} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left\{ \int_{r=0}^{R} r\sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{d}r \right\} \mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\left(R^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{R} \right\} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{R^3}{3}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2R^3\pi}{3}$$

19) Kiszámítandó az egységsugarú pozitív negyedkörben a következő integrál: $\iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\,\mathrm{d}T$.



Polárkoordinátákat bevezetve:

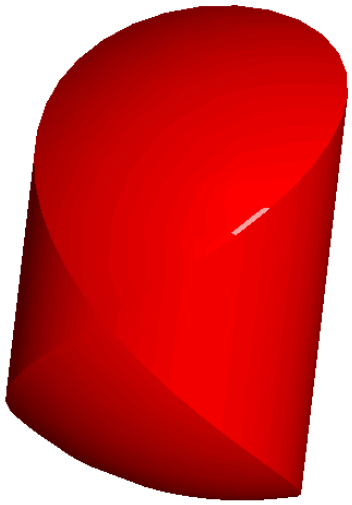
$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}}$$

A határok: $0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$.

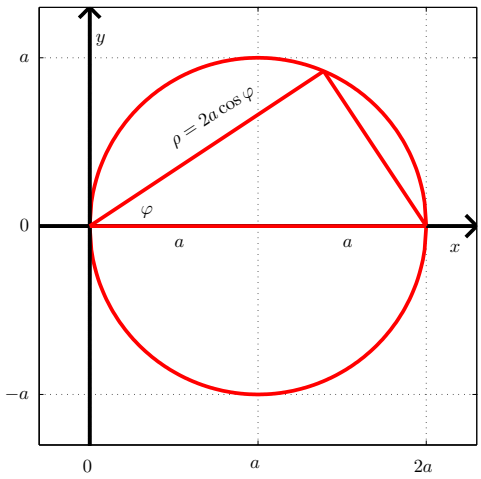
$$\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{r=0}^{1} \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}\,\mathrm{d}r \right\} \mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{r=0}^{1} r\left(r^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \right\} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} \frac{\left(r^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{r=0}^{1} \mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2}-1\right) \mathrm{d}\varphi = \left(\sqrt{2}-1\right) [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

20) Számítsuk ki az $x^2+y^2+z^2-4a^2=0$ gömb és $(x-a)^2+y^2-a^2=0$ henger közös részének térfogatát! (Viviani-féle test)



1. ábra. A Viviani-féle test 3D modellje



Az integrálandó függvény: $z = \sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}$. Az integrációs tartomány a $(x-a)^2 + y^2 - a^2 = 0$ kör belseje, azaz $0 \le r \le 2a\varphi$ és $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.
Az integrálandó függvény tehát:

$$\frac{V}{4} = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{r=0}^{2a\cos\varphi} \sqrt{4a^2 - r^2}\, r \,\mathrm{d}r \right\} \mathrm{d}\varphi \overset{*}{=}$$

A belső integrál:

$$\int_0^{2a\cos\varphi} r\sqrt{4a^2 - r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(4a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2a\cos\varphi} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left\{\sqrt{\left(4a^2 - 4a^2\cos^2\varphi\right)^3} - \sqrt{\left(4a^2\right)^3}\right\} = -\frac{8a^3}{3}\left\{\sqrt{\left(1-\cos^2\varphi\right)^3} - 1\right\} =$$

$$= \frac{8a^3}{3}\left(1 - \sin^3\varphi\right)$$

Ennek a tovább alakításához szükségünk van a $\sin^3\varphi$ primitív függvényére, amihez felhasználjuk a $\begin{cases} u &= \cos\varphi \\ \mathrm{d}u &= -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{cases}$ helyettesítést:

$$\int \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int \sin^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int \left(1-\cos^2\varphi\right)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= -\int \left(1-u^2\right)\,\mathrm{d}u = -\left(u - \frac{u^3}{3}\right) = -\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)$$

Innen az eredeti integrál:

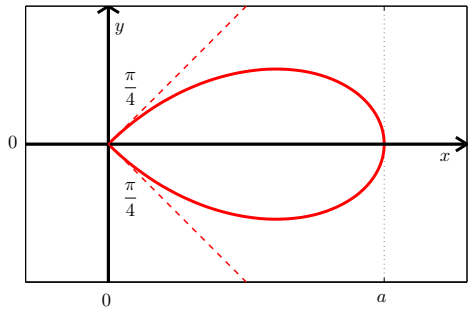
$$\overset{*}{=} \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^3 \varphi\right) \, \mathrm{d}\varphi = \frac{8a^3}{3} \left[\varphi + \cos\varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{8a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{8a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right),$$

ahonnan

$$V = \frac{32a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

21) Kiszámítandó a $z = x^2 - y^2$ hiperbolikus paraboloid térfogata az $r = a\cos 2\varphi$ lemniszkáta egy hurokja felett.



Polárkoordinátákra térünk át. Az áttéréshez szükséges összefüggések: $\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases}$, a határok: $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, valamint $0 \leq r \leq a\cos\varphi$, és $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$. Az intergrandus:

$$x^2 - y^2 = r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = r^2\cos 2\varphi$$

A kérdéses térfogat fele:

$$\frac{V}{2} = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{a\cos 2\varphi} r^2 \cos 2\varphi r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \overset{*}{=}$$

A belső integrál:

$$\int_{r=0}^{a\cos 2\varphi} r^3 \cos 2\varphi \,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^4}{4}\cos 2\varphi\right]_{r=0}^{a\cos 2\varphi} = \frac{a^4 \cos^5 2\varphi}{4}$$

Az eredeti integrál:

$$\frac{V}{2} = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^4}{4}\left[\frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin^5 2\varphi}{5\cdot 2} - \frac{\sin^3 2\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

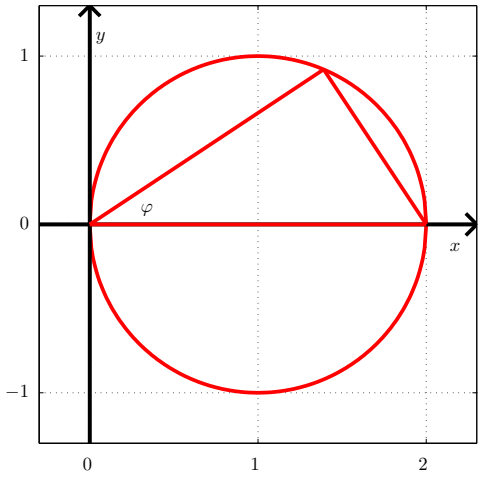
$$= \frac{a^4}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} - \frac{1}{3}\right) = \frac{a^4}{4}\left(\frac{6}{10} - \frac{1}{3}\right) = \frac{a^4}{4}\cdot\frac{8}{30} = \frac{a^4}{15}$$

A $\cos^5 2\varphi$ primitív függvénye ($\cos^4\alpha = \left(1-\sin^2\alpha\right)^2$ kifejtésével):

$$\int \cos^5 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int \cos 2\varphi \cos^4 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int \cos 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi + \int \cos 2\varphi \sin^4 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi -$$

$$-2\int \cos 2\varphi \sin^2 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin^5 2\varphi}{5\cdot 2} - \frac{\sin^3 2\varphi}{3}$$

22) Kiszámítandó a $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ függvény integrálja az $(x-1)^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör belsejére vonatkozóan.



A megadott tartomány határai polárkoordinátákkal: $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ és $0 \le r \le 2\cos\varphi$. Az integrál:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\varphi} \frac{1}{r} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [r]_0^{2\cos\varphi} \,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = [2\sin\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4$$

23) Integráljuk a $z = x^2 + y^2$ függvényt az $(x-3)^2 + (y-2)^2$ egyenletű kör belsejére!

A transzformáció: $\left\{\begin{array}{ll} x & =3+r\cos\varphi \\ y & =2+\sin\varphi \end{array}\right.$, amivel a határok: $0\le r\le 1$ és $0\le\varphi\le 2\pi$. A Jacobi determináns: r.

$$x^2+y^2=(3+r\cos\varphi)^2+(2+r\sin\varphi)^2=13+6r\cos\varphi+4r\sin\varphi+r^2$$

Az integrálás ezzel:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(13+6r\cos\varphi+4r\sin\varphi+r^2\right)r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1\left(13r+r^3\right)\,\mathrm{d}r=$$

$$=2\pi\left[\frac{13r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\right]_0^1=13{,}5\pi$$

24) Integráljuk a $z=|2xy|$ függvényt az $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ egyenletű ellipszis belsejére vonatkozóan!

A transzformáció képletei: $\left\{\begin{array}{ll} x & =3r\cos\varphi \\ y & =2r\sin\varphi \end{array}\right.$. Ezekből a határok: $0\le r\le 1$ és $0\le\varphi\le 2\pi$.

A Jacobi determináns:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc} 3\cos\varphi & -3r\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & 2r\cos\varphi \end{array}\right|=6r$$

Az integrál ezzel:

$$4\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cdot 3r\cos\varphi 2r\sin\varphi 6r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r=288\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r=$$

$$=288\int_0^1 r^2\left[-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}r=144\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r=48$$

25) Számítsuk ki a $0\le x\le\sqrt{1-y^2-z^2}$, $0\le y\le\sqrt{1-z^2}$, $0\le z\le 1$ nyolcadgömbre vonatkozólag az $\iiint xyz\,\mathrm{d}V$ integrált!

$$I=\int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\left[\int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}}xyz\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}z=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}}yz\frac{1-y^2-z^2}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{z\frac{1-z^2}{2}-z\frac{\left(1-z^2\right)^2}{4}-z^3\frac{1-z^2}{2}\right\}\mathrm{d}z=\frac{1}{8}\int_0^1 z\left(1-z^2\right)^2\,\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left(z-2z^3+z^5\right)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{48}$$

26) Számítsuk ki az $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ $(a>0, b>0, c>0)$ egyenletű sík és a koordinátasíkok által határolt homogén test súlypontjának koordinátáit!

A súlypont koordinátái:

$$x_S=\frac{\int x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z},\quad y_S=\frac{\int y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z},\quad z_S=\frac{\int z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

Az x_S-t kiszámítjuk, a többi hasonlóan számítandó:

$$\int x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^c\left\{\int_0^{1-b\left(\frac{z}{c}\right)}\left[\int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)} x\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^c\left\{\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}\left[1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right]^2\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}z\overset{*}{=}$$

a belső integrál az $u=1-\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}$ helyettesítéssel ($\mathrm{d}y=b\,\mathrm{d}u$):

$$\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)^2\mathrm{d}y=-\int_{1-\frac{z}{c}}^0 bu^2\,\mathrm{d}u=\frac{b}{3}\left(1-\frac{z}{c}\right)^3$$

Tehát

$$\overset{*}{=}\frac{a^2b}{6}\int_0^c\left(1-\frac{z}{c}\right)^3\mathrm{d}z=-\frac{a^2bc}{24}\left[\left(1-\frac{z^3}{c}\right)^4\right]_0^c=\frac{a^2bc}{24}$$

A tetraéder térfogata, azaz a súlypont koordinátáiban a nevező:

$$\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{abc}{6}$$

Ezzel a súlypont koordinátái:

$$x_S=\frac{a}{4},\quad y_S=\frac{b}{4},\quad z_S=\frac{c}{4}.$$