Matematika A3 építőmérnököknek 1. gyakorlat
Szeparábilis differenciálegyenletek

Tudnivalók:

- Gyakorlatvezető: Szőke Márton
- Elérhetőségek: Teams: szoke.martonpeter@edu.bme.hu, email: szokemp@math.bme.hu
- Feladatsorok megoldásokkal a honlapomon: math.bme.hu/∼szokemp
- Követelmények: 2 ZH, amiken külön-külön 30%-t kell elérni, vizsgán 40%-ot, de összesítve 50%-ot

Szeparábilis differenciálegyenletek

Szétválasztható (vagy szeparábilis) differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{1}$$

ahol $g(y) \neq 0$. Ekkor az egyenlet általános megoldását a

$$\int \frac{1}{g(y)} \, \mathrm{d}y = \int f(x) \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

egyenlet megoldásából kaphatjuk meg.

Ha $g(y_0) = 0$ valamilyen y_0-ra, akkor (1) egyenletnek a konstans $y(x) \equiv y_0$ függvény is megoldása.

1. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános és egy partikuláris megoldását:

$$y' = \frac{y}{x}$$

Megoldásvázlat Ez az egyenlet szétválasztható egyenlet: (1) egyenlet jelöléseivel most $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = y$. A (2) integrálegyenletből $\ln y = \ln x + c_1$ adódik, ahol c_1 tetszőleges konstans, vagyis $y(x) = c_2 \cdot x$ valamilyen c_2 konstansra, ez a differenciálegyenlet általános megoldása.

Partikuláris megoldást úgy kapunk, ha rögzítünk egy c_2-t az általános megoldásban, pl $c_2 = 1$ esetén adódó partikuláris megoldás: $y(x) = x$.

2. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' = \mathrm{e}^{x+y}$$

Megoldásvázlat $y' = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$ szétválasztható egyenlet, aminek általános megoldására (2) egyenletből az adódik, hogy

$$-\mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^x + c,$$

vagyis $y(x) = -\ln(-\mathrm{e}^x + c)$.

3. feladat Adja meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását:

$$y' = \frac{\mathrm{e}^x}{y+1}, \; y(0) = -4$$

Megoldásvázlat Az általános megoldás ((2) alapján):

$$\frac{1}{2}y^2 + y = \mathrm{e}^x + c. \tag{3}$$

A kezdetiérték-probléma megoldását úgy kapjuk, hogy $x = 0$ esetén tudjuk, hogy $y = -4$, így ezeket (3) egyenletbe behelyettesítve $c = 3$. Tehát a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$\frac{1}{2}y(x)^2 + y(x) = 3 + \mathrm{e}^x. \tag{4}$$

Megjegyzés: Ebből $y(x)$ kifejezhető, de nem szükséges. Előfordulnak olyan differenciálegyenletek is, ahol nem is lehet kifejezni $y(x)$-et, csak implicit képlet adható rá (mint (4)).

4. feladat Adja meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását:

$$y' = y^2 \sin(x),\ y(0) = \tfrac{1}{2}$$

Megoldásvázlat Az általános megoldás:

$$-\frac{1}{y} = -\cos x + c,$$

ahol a kezdetiértékből $c = -1$. Tehát $y(x) = \frac{1}{\cos x + 1}$.

5. feladat Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' = \frac{y-2}{xy},\ (x \neq 0,\ y \neq 0)$$

Oldja meg a kezdetiérték-problémákat az alábbi esetekben:

1. $y(1) = 2$
2. $y(1) = 3$
3. $y(-1) = -3$

Megoldásvázlat

1. (1) egyenletben $g(y) = \frac{y-2}{y}$, így $g(2) = 0$. Tehát az $y(1) = 2$ kezdeti feltétel esetén konstans megoldást kapunk: $y(x) \equiv 2$.
2. (2) egyenlet bal oldalán az $\frac{y}{y-2} = 1 + \frac{2}{y-2}$ függvényt integráljuk, aminek primitív függvénye $y + 2\ln(y-2)$. Tehát ekkor az általános megoldás

$$y + 2\ln(y-2) = \ln x + c. \tag{5}$$

   A $y(1) = 3$ kezdeti feltételből $c = 3$ adódik, azaz $y(x) + 2\ln(y(x) - 2) = \ln x + 3$.
3. $y(-1) = -3$ feltétel esetén az (5) egyenletben a logaritmusokban negatív szám szerepelne. Ezért most (2) egyenletet úgy érdemes felírni, hogy

$$\int 1 - \frac{2}{2-y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{1}{-x}\,\mathrm{d}x,$$

   ahonnan $y - 2\ln(2-y) = -\ln(-x) + c$. Ekkor a kezdeti feltételből $c = -3$, így a megoldás: $y(x) - 2\ln(2 - y(x)) = -\ln(-x) - 3$.

6. feladat A rádium bomlása során a sugárzó anyag $y(t)$ mennyisége arányos az anyag csökkenésének gyorsaságával. Tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1600 év. A kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik el 100 év alatt?

Segítség: $-y' = Ay$, ahol A az arányossági tényező és $y(1600) = \dfrac{1}{2}y(0)$.

Megoldásvázlat A $-y' = Ay$ differenciálegyenlet általános megoldása $-\ln y = Ax + c$.

Csak a lebomlott anyag arányára vagyunk kíváncsiak, így feltehetjük, hogy $y(0) = 1$ (azaz a feltételünk $y(1600) = \frac{1}{2}$). Ha az $y(0) = 1$ feltételt behelyettesítjük az általános megoldásba, megkapjuk, hogy $c = 0$. Az $y(1600) = \frac{1}{2}$ feltételből az is kijön, hogy $A = \frac{\ln 2}{1600}$. Tehát $-\ln(y(x)) = \frac{\ln 2}{1600} \cdot x$. Ebből $-\ln(y(100)) = \frac{\ln 2}{16} \approx 0.043$, azaz $y(100) \approx 0.958$. Tehát a kiindulási anyag mennyiségének körülbelül 4.2%-a bomlik le 100 év alatt.

Homogén fokszámú egyenlet

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6}$$

alakú egyenlet $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel $u' = \frac{f(u)-u}{x}$ alakra hozható, ami szétválasztható differenciálegyenlet. Ezt megoldva megkapjuk u-t, ahonnan $y(x) = x \cdot u(x)$.

7. feladat Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$x + y - xy' = 0$$

Segítség:
Alkalmazzuk az $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ *helyettesítést.*

Megoldásvázlat Átalakítás után az egyenlet $y' = 1 + \frac{y}{x}$, azaz $y' = f(\frac{y}{x})$ az $f(u) = 1 + u$ függvényre. Így a behelyettesítés után $u(x)$-re kapott differenciálegyenlet

$$u' = \frac{1}{x}.$$

Ez egy szétválasztható egyenlet, aminek általános megoldása $u(x) = \ln x + c$, amiből $y(x) = x \cdot u(x) = x \cdot \ln x + cx$.

8. feladat Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + y = xy'$$

Megoldásvázlat Az előzőhöz hasonló típusú, de most $f(u) = \mathrm{e}^u + u$, így $u' = \frac{\mathrm{e}^u}{x}$, ahonnan $u(x) = -\ln(-\ln x - c)$, így $y(x) = -x\ln(-\ln x - c)$.

9. feladat Adja meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását:

$$x^2y' + xy = x^2 + y^2,\ y(1) = 2$$

Megoldásvázlat Átalakítás után látszódik, hogy ez is az előzőhöz hasonló típusú, most $f(u) = 1 + u^2 - u$. Az $u' = \frac{1+u^2-2u}{x}$ egyenletet megoldva átrendezés után $u(x) = 1 - \frac{1}{\ln x + c}$, így az általános megoldás $y(x) = x - \frac{x}{\ln x + c}$.

A kezdeti feltételből $c = -1$, vagyis $y(x) = x - \frac{x}{\ln x - 1}$.