Matematika A3 építőmérnököknek 2. gyakorlat
Elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

Általános alakja:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \tag{1}$$

ahol p, q ismert, folytonos függvények.

Az (1) egyenlet általános megoldását **konstans variációs módszer**rel tudjuk megtalálni. Ez 2 lépésből áll:

1. **Homogén** rész általános megoldása:

   $y' + p(x) \cdot y = 0$ átrendezés után ($y' = -p(x) \cdot y$) szétválasztható egyenletként megoldható. Legyen y_h ennek a homogén egyenletnek az általános megoldása.

2. **Inhomogén** egyenlet partikuláris megoldása:

   Ha a homogén rész általános megoldása $y_h = F(c, x)$, akkor az (1) egyenletnek egy y_p partikuláris megoldását megkaphatjuk $y_p = F(c(x), x)$ alakban. Ezt behelyettesítve (1) egyenletbe, megkapjuk $c'(x)$ függvényt. Innen $c(x)$ integrálással meghatározható, ebből pedig y_p is.

Ekkor az inhomogén egyenlet általános megoldása $y = y_h + y_p$.

1. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - y = \mathrm{e}^{-x} \tag{2}$$

Megoldásvázlat Az egyenlet (1) alakú $p(x) = -1$ és $q(x) = \mathrm{e}^{-x}$ függvényekkel. Így konstans variációs módszerrel meg tudjuk oldani:

1. A homogén egyenlet $y' - y = 0$, vagyis átrendezés után az $y' = y$ szétválasztható egyenletet kapjuk. Ennek az általános megoldása a korábban tanultak alapján $y_h = c \cdot \mathrm{e}^x$.

2. A (2) inhomogén egyenlet partikuláris megoldását így $y_p = c(x) \cdot \mathrm{e}^x$ alakban keressük (y_h-ban a tetszőlegesen választható konstans c-t lecseréltük egy ismeretlen $c(x)$ függvényre). Ezt az y_p-t visszahelyettesítjük (2) egyenletbe. Szorzat deriválási szabály szerint $y_p' = c'(x)\mathrm{e}^x + c(x)\mathrm{e}^x$, vagyis (2) egyenletbe helyettesítésből:

   $$(c'(x)\mathrm{e}^x + c(x)\mathrm{e}^x) - c(x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x},$$

   azaz $c'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$. Integrálás után $c(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ adódik, azaz $y_p = c(x) \cdot \mathrm{e}^x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

Tehát a (2) inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y(x) = y_h + y_p = c \cdot \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$xy' = \cos x - 2y \tag{3}$$

Megoldásvázlat

1. A homogén rész átrendezés után: $y' = -\frac{2}{x} \cdot y$. Ez szétválasztható, amiből $y_h = c \cdot x^{-2}$.

2. A partikuláris megoldást $y_p = c(x) \cdot x^{-2}$ alakban keressük. Visszahelyettesítve (3) egyenletbe

   $$c'(x) = x \cdot \cos x.$$

   Ebből parciális integrálással $c(x) = \sin x \cdot x + \cos x$.

Vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h + y_p = \frac{c}{x^2} + (\sin x \cdot x + \cos x) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

3. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$$

Megoldásvázlat A homogén rész általános megoldása $y_h = cx$. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p = c(x) \cdot x$ alakban keresve $c(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x$ adódik, így

$$y(x) = cx + \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln x.$$

4. feladat Adja meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását:

$$y' - y = 2t\mathrm{e}^{2t},\ y(0) = 1$$

Megoldásvázlat Előzőekhez hasonló jelöléssel $y_h = c\mathrm{e}^t$, $y_p = c(t)\mathrm{e}^t = 2e^{2t}(t-1)$, ahol $c(t)$ függvényt visszahelyettesítés után parciális integrálással tudtuk kiszámolni. Vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(t) = ce^t + 2\mathrm{e}^{2t}(t-1).$$

A kezdeti feltételből $c = 3$ jön ki. Tehát a kezdetiérték-probléma megoldása

$$y(t) = 3\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{2t}(t-1).$$

5. feladat Adja meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását $t > 0$ esetén:

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1,\ y(1) = 1/2$$

Megoldásvázlat $y_h = ct^{-2}$, $y_p = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right) \cdot t^{-2} = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2}$

$y(t) = ct^{-2} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2}$ általános megoldásba a kezdeti feltételt behelyettesítve $c = \frac{1}{12}$, vagyis a keresett függvény

$$y(t) = \frac{t^{-2}}{12} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2}.$$

6. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - 2y = t^2\mathrm{e}^{2t}$$

Megoldásvázlat $y_h = c\mathrm{e}^{2t}$, $y_p = \frac{t^3 \cdot \mathrm{e}^{2t}}{3}$, azaz

$$y(t) = c\mathrm{e}^{2t} + \frac{t^3 \cdot \mathrm{e}^{2t}}{3}.$$

7. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$\mathrm{e}^x\,(y' + y) = 1$$

Megoldásvázlat

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$$

8. feladat Adja meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását:

$$y' - \frac{2}{x}y = x,\ y(1) = 3$$

Megoldásvázlat Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = cx^2 + \ln x \cdot x^2.$$

A kezdeti feltételből $c = 3$, így a keresett függvény

$$y(x) = (3 + \ln x) \cdot x^2.$$

9. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - 3x^2 y = 6x^2$$

Megoldásvázlat Ezt az egyenletet már kétféleképpen is meg tudjuk oldani:

- Lineáris egyenletként: $y_h = c\mathrm{e}^{x^3}, y_p = \left(-2\mathrm{e}^{-x^3}\right) \cdot \mathrm{e}^{x^3} = -2$, így $y(x) = c\mathrm{e}^{x^3} - 2$.
- Szétválaszthatóként:
$$y' = 3x^2(2+y)$$
egy szétválasztható egyenlet, aminek a megoldása korábban tanultak alapján $\ln(2+y) = x^3 + c$, azaz $y(x) = c\mathrm{e}^{x^3} - 2$ (épp mint a másik módszerrel).

10. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^2+1}, \ (x \neq 0)$$

Megoldásvázlat $y_h = cx^{-2}$, $y_p = (x - \arctan x) \cdot x^{-2}$, így $y(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{\arctan x}{x^2}$.