Matematika A3 építőmérnököknek 3. gyakorlat
Autonóm és egzakt differenciálegyenletek

Autonóm differenciálegyenletek, stabilitás

Autonóm differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(y). \tag{1}$$

Egyensúlyi helyzetek (vagy kritikus pontok) az $f(y) = 0$ egyenlet megoldásai.

Egyensúlyi helyzeteket osztályozhatjuk stabilitás szempontjából. Ehhez $f(y)$ előjelét kell megvizsgálni. Az y_0 egyensúlyi helyzet

- **stabil**, ha y_0-tól balra f pozitív, y_0-tól jobbra negatív,
- **instabil**, ha y_0-tól balra f negatív, y_0-tól jobbra pozitív,
- **félig stabil** egyébként.

Ezután az (1) differenciálegyenlet megoldásai vázlatosan ábrázolhatók. Egyrészt az egyensúlyi helyzetek adják az egyenlet konstans megoldásait. Másrészt az ezek közötti megoldásgörbék monotonitása leolvasható f előjeléből.

Megjegyzés: Ahol $f(y) \neq 0$, ott (1) egy szétválasztható differenciálegyenlet, így az analitikus megoldás is megadható.

1. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázolja a megoldásokat!

$$y' = 3 - y$$

2. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázolja a megoldásokat!

$$y' = y(y-1)(y-2)$$

3. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázolja a megoldásokat!

$$y' = y(\mathrm{e}^y - 1)$$

4. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázolja a megoldásokat!

$$y' = (\mathrm{e}^{y+1} - 1)(y-2)^3$$

5. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából, továbbá vázlatosan ábrázolja is a megoldásokat:

$$y' = (2-y)\ln y$$

6. feladat Tekintsük az $y' = y^3 - y^2$ differenciálegyenletet! Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket és ezek típusát! Rajzoljunk le néhány jellemző megoldásgörbét! Adjuk meg az analitikus megoldást is!

Egzakt differenciálegyenletek

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

alakú egyenlet pontosan akkor **egzakt**, ha M, N parciális deriváltjai léteznek és folytonosak és

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3}$$

Ekkor létezik $F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ potenciálfüggvény, amire $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Ezt az $F(x,y)$ függvényt integrálással tudjuk meghatározni:

Az $M(x,y)$ függvényt integráljuk x szerint. Ekkor még F-ben van egy ismeretlen, csak y-tól függő $c(y)$ rész, amit $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ azonosságból tudunk meghatározni. (Hasonlóan működik, ha $N(x,y)$-t integráljuk y szerint, majd a csak x-től függő részt $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ egyenletből számoljuk ki.)

Ekkor (2) általános megoldása $F(x,y) = c$, ahol c tetszőleges konstans.

Megjegyzés: A (2)-beli felírás ekvivalens az $M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0$ alakkal.

7. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = 0 \tag{4}$$

8. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$(2x - 3y)\,\mathrm{d}y + (2y - 3x)\,\mathrm{d}x = 0$$

9. feladat Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^y + 2y)\,\mathrm{d}y = 0$$

10. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$2x(\sin(y) + 1) + x^2\cos(y)y' = 0$$

11. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$2x\cos(y) + \big(2y\cos(y) - (x^2 + y^2)\sin(y)\big)y' = 0$$

12. feladat Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{\frac{y^3}{x^4} + y}{\frac{y^2}{x^3} - x}$$