Matematika A3 építőmérnököknek 3. gyakorlat
Autonóm és egzakt differenciálegyenletek

Autonóm differenciálegyenletek, stabilitás

Autonóm differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(y). \tag{1}$$

Egyensúlyi helyzetek (vagy kritikus pontok) az $f(y) = 0$ egyenlet megoldásai.

Egyensúlyi helyzeteket osztályozhatjuk stabilitás szempontjából. Ehhez $f(y)$ előjelét kell megvizsgálni. Az y_0 egyensúlyi helyzet

- **stabil**, ha y_0-tól balra f pozitív, y_0-tól jobbra negatív,
- **instabil**, ha y_0-tól balra f negatív, y_0-tól jobbra pozitív,
- **félig stabil** egyébként.

Ezután az (1) differenciálegyenlet megoldásai vázlatosan ábrázolhatók. Egyrészt az egyensúlyi helyzetek adják az egyenlet konstans megoldásait. Másrészt az ezek közötti megoldásgörbék monotonitása leolvasható f előjeléből.

Megjegyzés: Ahol $f(y) \neq 0$, ott (1) egy szétválasztható differenciálegyenlet, így az analitikus megoldás is megadható.

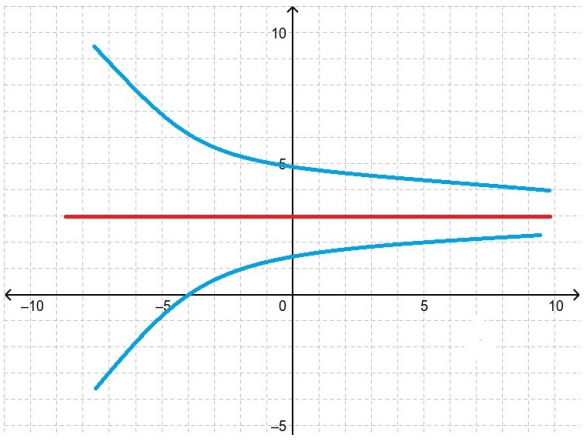
1. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázolja a megoldásokat!

$$y' = 3 - y$$

Megoldásvázlat Most $f(y) = 3-y$, aminek az egyetlen gyöke a 3, így az egyetlen egyensúlyi helyzet $y = 3$. Mivel f $y < 3$ esetén pozitív és $y > 3$ esetén negatív, így ez egy stabil egyensúlyi helyzet.

A vázlatos megoldásgörbék:

- az $y = 3$ egyensúlyi helyzetben konstans megoldásgörbét kapunk (ábrán pirossal),
- $y > 3$ esetén $f(y) < 0$, így itt csökkenő megoldásgörbék vannak, amik rásimulnak az egyensúlyi megoldásra (ezek közül egy látható az ábrán kékkel, a konstans megoldás felett),
- $y < 3$ esetén $f(y) > 0$, így itt növekvő megoldásgörbék vannak, amik szintén rásimulnak az egyensúlyi megoldásra (ezek közül is egy látható az ábrán kékkel, a konstans megoldás alatt).

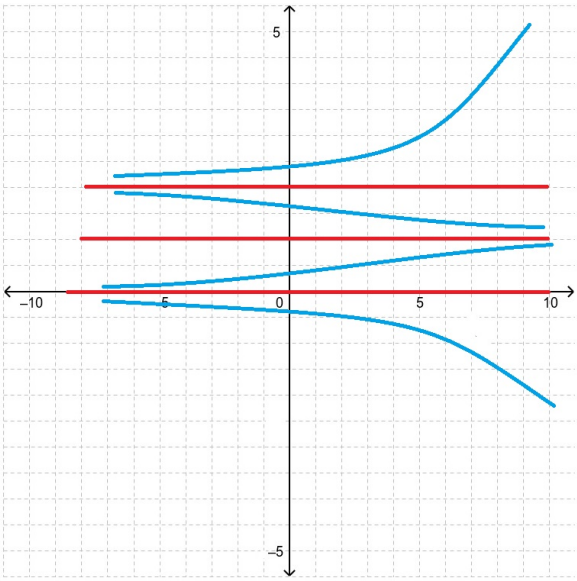


2. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázolja a megoldásokat!

$$y' = y(y-1)(y-2)$$

Megoldásvázlat $f(y) = y(y-1)(y-2)$ gyökei 0, 1 és 2. Az f függvény nő $0 < y < 1$ és $2 < y$ esetén és csökken $y < 0$ és $1 < y < 2$ esetén, így a 0 és a 2 instabil, az 1 stabil egyensúlyi helyzet.

Ábrán megint pirossal láthatók a konstans megoldásgörbék és kékkel egy-egy megoldásgörbe a köztes intervallumokból:



Megjegyzés: Ahogy az ábrákon is látszódik, a nem konstans megoldásgörbék ∞-ben és $-\infty$-ben is mindig vagy rásimulnak egy konstans megoldásra vagy elszállnak ∞-be (ez csak a legnagyobb egyensúlyi helyzet felett lehetséges) vagy $-\infty$-be (csak legkisebb egyensúlyi helyzet alatt).

Egy egyensúlyi helyzet pontosan akkor stabil, ha $+\infty$-ben felülről és alulról is rásimulnak a megoldásgörbék és pontosan akkor instabil, ha mindkét irányban eltávolódnak tőle a megoldásgörbék $+\infty$-ben.

3. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázolja a megoldásokat!

$$y' = y(\mathrm{e}^y - 1)$$

Megoldásvázlat Az egyetlen egyensúlyi helyzet $y = 1$, ami félig stabil. Ez ad egy konstans megoldásgörbét. A többi megoldásgörbe monoton nő.

4. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázolja a megoldásokat!

$$y' = (\mathrm{e}^{y+1} - 1)(y-2)^3$$

Megoldásvázlat Két egyensúlyi helyzet van: a -1 stabil, a 2 instabil. A nem konstans megoldásgörbék monoton nőnek $y < -1$ és $y > 2$ esetén, míg monoton csökkennek $-1 < y < 2$ esetén.

5. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából, továbbá vázlatosan ábrázolja is a megoldásokat:

$$y' = (2-y)\ln y$$

Megoldásvázlat $f(y) = (2-y)\ln y$ gyökei $y = 1$ és $y = 2$. Mivel f csak az $(1, 2)$ nyílt intervallumon pozitív, így az $y = 1$ instabil, $y = 2$ pedig stabil.

Ennek megfelelően a megoldásgörbék: $y = 1$-ben és $y = 2$-ben konstans, $y > 2$ és $y < 1$ esetén csökkenőek, $1 < y < 2$ esetén pedig növőek.

6. feladat Tekintsük az $y' = y^3 - y^2$ differenciálegyenletet! Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket és ezek típusát! Rajzoljunk le néhány jellemző megoldásgörbét! Adjuk meg az analitikus megoldást is!

Megoldás vázlat Egyensúlyi helyzetek $y = 0$ és $y = 1$. Ebből $y = 0$ félig stabil, $y = 1$ instabil.

Megoldásgörbék egyensúlyi helyzetben konstansok, $y < 0$ és $0 < y < 1$ esetén csökkenőek, $1 < y$ esetén növekvőek.

Az egyenlet az egyensúlyi helyzeteken kívül szétválaszthatóként megoldható. Az integrálás törtekre bontás segítségével végezhető el, az általános megoldás például $y > 1$ esetén:

$$\ln(y-1) - \ln(y) + \frac{1}{y} = x + c.$$

Egzakt differenciálegyenletek

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

alakú egyenlet pontosan akkor **egzakt**, ha M, N parciális deriváltjai léteznek és folytonosak és

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3}$$

Ekkor létezik $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ potenciálfüggvény, amire $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Ezt az $F(x, y)$ függvényt integrálással tudjuk meghatározni:

Az $M(x, y)$ függvényt integráljuk x szerint. Ekkor még F-ben van egy ismeretlen, csak y-tól függő $c(y)$ rész, amit $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ azonosságból tudunk meghatározni. (Hasonlóan működik, ha $N(x, y)$-t integráljuk y szerint, majd a csak x-től függő részt $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ egyenletből számoljuk ki.)

Ekkor (2) általános megoldása $F(x, y) = c$, ahol c tetszőleges konstans.

Megjegyzés: A (2)-beli felírás ekvivalens az $M(x, y) + N(x, y) \cdot y' = 0$ alakkal.

7. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = 0 \tag{4}$$

Megoldásvázlat A (4) egyenlet (2) alakú $M(x, y) = y$, $N(x, y) = x$ függvényekkel. A (3) feltétel teljesül, hiszen

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1.$$

Tehát (4) egzakt, így az általános megoldáshoz az $F(x, y)$ potenciálfüggvényt kell kiszámolni. Tudjuk, hogy $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, így $M(x, y)$ x szerinti integrálásából azt kapjuk, hogy $F(x, y) = xy + c(y)$, ahol $c(y)$ egy csak y-tól függő tag. Azt is tudjuk, hogy $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, így $F(x, y) = xy + c(y)$ függvényt y szerint deriválva $N(x, y) = x$ függvényt kell kapnunk. Az $xy + c(y)$ függvénynek az y szerinti deriváltja $x + c'(y)$, vagyis most $c'(y) = 0$, így $c(y) = 0$ választható.

Tehát $F(x, y) = xy$ és így (4) általános megoldása: $xy = c$, ahol c tetszőlegesen választható konstans.

8. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$(2x - 3y)\,\mathrm{d}y + (2y - 3x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Megoldásvázlat Most $M(x, y) = 2y - 3x$, $N(x, y) = 2x - 3y$. A (3) most is teljesül, így ez is egy egzakt differenciálegyenlet. A $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ azonosságból tudjuk, hogy $F(x, y) = 2xy - \frac{3}{2}x^2 + c(y)$ alakú. Ezután $\frac{\partial F}{\partial y} = N$-ből kapjuk, hogy $c'(y) = -3y$, azaz $c(y) = -\frac{3}{2}y^2$ választható.

Tehát $F(x, y) = 2xy - \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ és az általános megoldás $2xy - \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right) = c$.

9. feladat Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\mathrm{e}^y \,\mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^y + 2y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Megoldásvázlat $M(x,y) = \mathrm{e}^y$, $N(x,y) = x\mathrm{e}^y + 2y$, így $\frac{\partial M}{\partial y} = \mathrm{e}^y = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Ekkor a potenciálfüggvény:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^y + c(y),$$

ahol $c(.)$ tetszőleges függvény.

Másrészt $\frac{\partial F}{\partial y} = N$-ből tudjuk, hogy

$$x\mathrm{e}^y + c'(y) = x\mathrm{e}^y + 2y$$

azaz $c(y) = y^2 + c$.

Így az egyenlet általános megoldása

$$x\mathrm{e}^y + y^2 = c.$$

10. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$2x(\sin(y) + 1) + x^2\cos(y)y' = 0$$

Megoldásvázlat Ellenőrizhető, hogy az egyenlet egzakt. A potenciálfüggvény

$$F(x,y) = x^2(1 + \sin y),$$

így az általános megoldás $x^2(1 + \sin y) = c$.

11. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$2x\cos(y) + \big(2y\cos(y) - (x^2 + y^2)\sin(y)\big)y' = 0$$

Megoldásvázlat Ez is egzakt, az általános megoldás: $\left(x^2 + y^2\right) \cdot \cos y = c$.

12. feladat Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{\frac{y^3}{x^4} + y}{\frac{y^2}{x^3} - x}$$

Megoldásvázlat Az egyenlet egzakt. A hozzátartozó potenciálfüggvény

$$F(x,y) = \frac{y^2}{x^3} - x,$$

így az általános megoldás $\frac{y^2}{x^3} - x = c$.