Matematika A3 építőmérnököknek 4. gyakorlat
Állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{1}$$

alakú egyenletet szeretnénk megoldani, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $g(t)$ ismert folytonos függvény.

A megoldás menete két lépésből áll:

1. $ay'' + by' + cy = 0$ homogén egyenlet általános megoldása: y_h
2. (1) egy partikuláris megoldásának meghatározása: y_p

Ezek után (1) általános megoldása: $y = y_h + y_p$.

Homogén rész megoldása

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

egyenlet megoldásának lépései:

1. Felírjuk a karakterisztikus egyenletet: $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$
2. Megkeressük a karakterisztikus egyenlet gyökeit: r_1, r_2
3. Meghatározzuk az általános megoldást:
   (i) Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 \neq r_2$, akkor $y_h = c_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{r_2 t}$,
   (ii) Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 = r_2$, akkor $y_h = c_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + c_2 t \mathrm{e}^{r_1 t}$,
   (iii) Ha $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$ és $r_1 = u + iv$ (azaz $r_2 = u - iv$), akkor $y_h = c_1 \mathrm{e}^{ut} \cos(vt) + c_2 \mathrm{e}^{ut} \sin(vt)$.

1. feladat Adjuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y'' - 2y' + y = 0$

(b) $y'' - 2y' - y = 0$

(c) $2y'' - 6y' + 5y = 0$

2. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémák megoldását!

(a) $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$

(b) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

Próbafüggvény-módszer

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{3}$$

egyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározására akkor tudjuk használni a próbafüggvény-módszert, ha

$$g(t) = \mathrm{e}^{ut} \cdot (A_n(t) \cos(vt) + B_m(t) \cdot \sin(vt))$$

alakú valamilyen $u, v \in \mathbb{R}$-re és A_n, B_m n-ed, illetve m-edfokú polinomra, azaz

$$A_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots a_1 t + a_0,$$

$$B_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots b_1 t + b_0$$

alakúak adott $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots b_m$ együtthatókra.

Legyen $s \in \{0, 1, 2\}$ az $u + iv$ komplex szám multiplicitása a homogén részhez tartozó karakterisztikus egyenletben. Ekkor a partikuláris megoldást

$$y_p = t^s \cdot \mathrm{e}^{ut} \cdot (P_k \cdot \cos(vt) + Q_k(t) \cdot \sin(vt))$$

alakban keressük, ahol $k = \max(n, m)$, P_k, Q_k pedig k-adfokú polinomok, azaz

$$P_k(t) = p_k t^k + p_{k-1} t^{k-1} + \dots p_1 t + p_0,$$

$$Q_k(t) = q_k t^k + q_{k-1} t^{k-1} + \dots q_1 t + q_0,$$

ahol az ismeretlen együtthatók a (3) egyenletbe való visszahelyettesítésből adódnak.

3. feladat Adott $g(t)$ esetén milyen alakban keressük a partikuláris megoldást? (Tegyük fel, hogy $s = 0$ a példákban!)

(a) $g(t) = 1 + t^2$

(b) $g(t) = \mathrm{e}^{3t}(1 - t)$

(c) $g(t) = \mathrm{e}^{-2t} \cdot \sin(4t)$

(d) $g(t) = \mathrm{e}^{t} \cdot (\cos(2t) + (1 + t^3) \cdot \sin(2t))$

4. feladat Tekintsük az $y'' + y' - 2y = 0$ homogén differenciálegyenletet!

(a) Adjuk meg az egyenlet általános megoldását!

(b) Adjuk meg az $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ kezdeti értékekhez tartozó megoldást!

(c) Adjuk meg a következő inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-t}$$

5. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 2y' - 3y = -3t\mathrm{e}^{-t}$$

6. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-t}$$

7. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 2y' + 5y = 2\mathrm{e}^{t} \sin(2t)$$

8. feladat Adjuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását!

$$y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-t} \sin t$$