Matematika A3 építőmérnököknek 5. gyakorlat
Próbafüggvény-módszer, hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Próbafüggvény-módszer

1. feladat

(a) Oldjuk meg az $y'' + 4y = 3\sin x$ differenciálegyenletet!

(b) Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' + 4y = x^2 + 3x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

Megoldásvázlat

(a) A karakterisztikus egyenlet $r^2 + 4 = 0$. A gyökök: $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$. Így a homogén rész általános megoldása $y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását próbafüggvény-módszerrel keressük: $g(x) = 3\sin x$ és i nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek (azaz $s = 0$), így a próbafüggvény:

$$y_p = p_0 \cos x + q_0 \sin x.$$

Visszahelyettesítés után $\sin x$-es tagok együtthatóiból $q_0 = 1$, míg $\cos x$-es tagokból $p_0 = 0$.

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \sin x$.

(b) A homogén rész általános megoldása most is $y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p = p_2 x^2 + p_1 x + p_0$ alakban keressük. Ezt kétszer deriválva és az eredeti egyenletbe helyettesítve a $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{3}{4}$ és $p_0 = -\frac{1}{8}$ együtthatók adódnak. Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}.$$

Az $y(0) = 0$ feltételből $c_1 = \frac{1}{8}$. Az $y'(0) = 2$ egyenletből $c_2 = \frac{11}{16}$. Tehát a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$y = \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{11}{16}\sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}.$$

2. feladat

Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Megoldásvázlat A karakterisztikus egyenlet gyökei 1 és 2, így a homogén rész általános megoldása $y_h = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t}$.

Az inhomogén rész $g(t) = 2\mathrm{e}^t$. Mivel 1 gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért most $s = 1$, azaz a partikuláris megoldást $y_p = p_0 t\mathrm{e}^t$ alakban keressük. Ezt kétszer deriválva, majd visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe az e^t együtthatóiból $p_0 = -2$. Így $y_p = -2t\mathrm{e}^t$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = y_h + y_p = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^t.$$

A kezdeti értékekből

$$1 = c_1 + c_2,$$

$$2 = c_1 + 2c_2 - 2.$$

Így $c_1 = -2$, $c_2 = 3$ és $y = -2\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^t$.

Hiányos másodrendű differenciálegyenlet

Hiányos másodrendű differenciálegyenletről akkor beszélünk, ha x, y és y' közül valamelyik (akár egyszerre több) nem jelenik meg az egyenletben. Három típussal foglalkozunk részletesebben:

- Ha y és y' is hiányzik: $y'' = f(x)$. Ekkor $y = \int\int f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$.
- Ha y hiányzik: $p(x) = y'(x)$ helyettesítéssel ($y''(x) = p'(x)$) elsőrendű egyenletet kapunk $p(x)$-re. Ezt megoldva $y = \int p(x)\,\mathrm{d}x$.
- Ha x hiányzik: $p(y) = y'$ helyettesítéssel ($y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p$) $p(y)$-ra elsőrendű differenciálegyenletet kapunk. Ennek megoldása után $y' = p(y)$ elsőrendű szétválasztható egyenlet megoldása y.

3. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat!

$$y''y - (y')^2 = 0$$

(a) $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

(b) $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

(c) $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$

Megoldásvázlat $p(y) = y'$ helyettesítés után

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p \cdot y - p^2 = 0$$

egyenlet adódik. Ez szétválasztható, általános megoldása $p(y) = c \cdot y$. Így y a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = cy$ szétválasztható egyenlet megoldásából adódik, vagyis $y = c_1 \mathrm{e}^{c_2 x}$.

(a) Az $y(0) = 0$ feltételből $c_1 = 0$, így viszont másik feltétel nem teljesülhet, azaz nincs megoldás.

(b) Kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, azaz $y = \mathrm{e}^{3x}$.

(c) Kezdeti feltételekből $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, azaz $y = 3\mathrm{e}^{x}$.

4. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' = 12\sqrt{y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Megoldásvázlat $p(y) = y'$ helyettesítés után a $p \cdot p' = 12\sqrt{y}$ szétválasztható egyenletet kapjuk. Ennek az általános megoldása $p = \pm\sqrt{16y^{3/2} + c}$. Kezdeti feltételekből itt $c = 0$. Így y az $y' = \pm 4y^{3/4}$ megoldásából adódik: $y = 0$ (ez teljesíti a kezdeti feltételeket) vagy $y = (x + C)^4$, ahol az $y(0) = 0$ kezdeti feltételből $C = 0$, így $y = x^4$.

5. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' = -2t(y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

Megoldásvázlat $p(t) = y'(t)$ helyettesítéssel $p' = -2tp^2$ szétválasztható egyenletet kapjuk, aminek az általános megoldása $p(t) = \frac{1}{t^2 - c}$. Az $y'(0) = -1$ kezdeti feltételből $c = 1$.

Ezután az eredeti egyenlet általános megoldása integrálással számolható:

$$y = \int \frac{1}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-1}{2(1-t)} + \frac{-1}{2(1+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln(1-t) - \ln(1+t)) + C,$$

ahol az $y(0) = 0$ kezdeti feltételből $C = 0$. Tehát a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$y = \frac{1}{2}(\ln(1-t) - \ln(1+t)),$$

6. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y'' = \mathrm{e}^{2x} + \cos(3x)$

(b) $y'' = 1 + \sin x$

Megoldásvázlat Jobb oldalt kétszer integrálva kapjuk a megoldásokat:

(a) $y = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{9}\cos(3x) + c_1 x + c_2$

(b) $y = \frac{x^2}{2} - \sin x + c_1 x + c_2$

7. feladat Adjuk meg az alábbi egyenlet általános megoldását!

$$y'' = \frac{y'}{x} + x \sin x$$

Megoldásvázlat $p(x) = y'(x)$ helyettesítés után p-re elsőrendű lineáris egyenlet adódik:

$$p' = \frac{p}{x} + x \sin x.$$

Ennek az általános megoldása konstans variációs módszerrel: $p(x) = c \cdot x - \cos x \cdot x$. Ezt integrálva

$$y = c_1 x^2 - x \sin x - \cos x + c_2.$$

8. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$(y')^2 + 2yy'' = 0$$

Megoldásvázlat $p(y) = y'$ helyettesítéssel a kapott egyenlet $p^2 + 2yp \cdot p' = 0$, ami átrendezve $p' = -\frac{p}{2y}$, ami szétválasztható. Ennek az általános megoldása $p(y) = c \cdot y^{-\frac{1}{2}}$, azaz $y' = c \cdot y^{-\frac{1}{2}}$. Ez is szétválasztható, amit megoldva megkapjuk az eredeti egyenlet általános megoldását:

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = c_1 x + c_2.$$

9. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' = 2y'y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Megoldásvázlat A $p(y) = y'$ helyettesítés után kapott szétválasztható egyenlet megoldása $p(y) = y^2 + c$. A kezdeti feltételeket használva $c = 1$. Az $y' = y^2 + 1$ szétválasztható egyenlet megoldása $y = \tan(x + C)$, ahol az $y(0) = 0$ kezdeti feltételből $C = 0$, azaz $y = \tan x$.

10. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + \frac{4}{x} y' = x$$

Megoldásvázlat A $p(x) = y'(x)$ helyettesítés után a differenciálegyenlet $p' + \frac{4}{x} p = x$ egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet p-re. A homogén rész általános megoldása $p_h = c \cdot x^{-4}$. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása megkapható konstans variációs módszerrel: $p_{\text{part}} = \frac{x^2}{6}$. Tehát $p(x) = c \cdot x^{-4} + \frac{x^2}{6}$. Ezt integrálva az eredeti egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 x^{-3} + \frac{x^3}{18} + c_2.$$

11. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$$

Megoldásvázlat Az egyenlet megoldható $p(y) = y'$ helyettesítéssel. A helyettesítés után kapott differenciálegyenlet y-ra: $\frac{(y')^2}{2} = 2y^2 + c$, ahol a kezdeti feltételekből $c = -16$. A kapott egyenletet y'-re átrendezve $y' = 2\sqrt{y^2 - 8}$, ami szétválasztható. Ennek a megoldásához használjuk az

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\,\mathrm{d}u = \operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

nevezetes integrált. Ennek segítségével kapjuk, hogy

$$\operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{y}{\sqrt{8}}\right) = 2x + C,$$

azaz

$$y = \sqrt{8}\cosh(2x + C).$$

Itt az $y(0) = 3$ feltételből $C = \operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{\ln 2}{2}$. Így egyszerűsítések után azt kapjuk, hogy a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$y = 2\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}.$$

Egyszerűbben: Vegyük észre, hogy a feladatban megadott differenciálegyenlet egy konstans együtthatós homogén másodrendű differenciálegyenlet és így sokkal egyszerűbben is megoldható (l. 4. Gyakorlat 2. feladat (a)).

12. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$xy'' = 3y' + x$$

Megoldásvázlat A $p(x) = y'(x)$ helyettesítés után p-re egy elsőrendű lineáris differenciálegyenletet kapunk (átrendezés után): $p' = \frac{3}{x}p + 1$. Ennek az általános megoldása $p = cx^3 - \frac{x}{2}$. Ezt integrálva kapjuk az eredeti egyenlet általános megoldását:

$$y = c_1x^4 - \frac{x^2}{4} + c_2.$$

13. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' = y'\mathrm{e}^{-y}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$$

Megoldásvázlat $p(y) = y'$ helyettesítéssel kapott szétválasztható egyenlet megoldása

$$p(y) = -\mathrm{e}^{-y} + c.$$

Ezután az $y' = -\mathrm{e}^{-y} + c$ egyenlet megint szétválasztható, ahol az $\int \frac{1}{-\mathrm{e}^{-y}+c}\,\mathrm{d}y$ integrálás az $u = \mathrm{e}^y$ helyettesítéssel számolható. A kapott megoldás ez alapján

$$\frac{1}{c_1}\ln(c_1\mathrm{e}^y - 1) = x + c_2.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 1 + \mathrm{e}^{-3}$ (ezt az $y' = -\mathrm{e}^{-y} + c$ egyenletbe helyettesítéssel érdemes számolni) és $c_2 = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-3}}$. Tehát

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3}}\ln((1+\mathrm{e}^{-3})\mathrm{e}^y) - 1) = x + \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-3}}.$$