Matematika A3 építőmérnököknek 6. gyakorlat
Kombinatorika

Permutáció

- Ismétlés nélküli permutáció: n különböző elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni: $P_n = n!$.
- Ismétléses permutáció: n elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni, ha ezek közül $k_1, k_2, \ldots, k_s$ egyforma: $P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_s)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!}$.

Kombináció

- Ismétlés nélküli kombináció: n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani: $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$.
- Ismétléses kombináció: n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha egy elemet többször is választhatunk: $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$.

Variáció

- Ismétlés nélküli variáció: n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha a sorrend is számít: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Ismétléses variáció: n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha a sorrend is számít és egy elemet többször is választhatunk: $V_n^{k,i} = n^k$.

1. feladat Az 1, 2, 3, 4, 5 számkártyák mindegyikét felhasználva hány különböző ötjegyű szám készíthető?

Megoldásvázlat 5 különböző kártyát akarunk sorba rendezni, vagyis ez egy ismétlés nélküli permutáció. Így a sorrendek száma: 5!.

2. feladat A 0, 2, 4, 6, 8 számkártyák mindegyikét felhasználva hány különböző ötjegyű szám készíthető?

Megoldásvázlat Hasonló az előzőhöz, de a 0 nem állhat a szám elején, így először csak 4 lehetőségünk van. Így az előállítható ötjegyű számok száma: $4 \cdot 4!$.

3. feladat A 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3 számkártyák mindegyikét felhasználva hány különböző hétjegyű szám készíthető?

Megoldásvázlat Mivel vannak egyforma kártyák, ez egy ismétléses permutáció, de megint figyelni kell, hogy első helyre nem kerülhet a 0. Így az elkészíthető számok száma: $\frac{6 \cdot 6!}{2! \cdot 3!}$.

4. feladat A DIFFERENCIÁLEGYENLET szó betűit összekeverve hány különböző "szó" készíthető?

Megoldásvázlat Ez is ismétléses permutáció. 20 betű van, ebből 2 db I, 2 db F, 5 db E, 2 db N és 2 db L (a maradék 7 betű egyszer szerepel). Így a "szavak" száma: $\frac{20!}{2^4 \cdot 5!}$.

5. feladat Hány új típusú magyar rendszámtábla készíthető? ("2×2 betű - 3 szám", ahol összesen 26-féle betű és 10-féle szám szerepelhet)

Megoldásvázlat Ismétléses variációval: $26^4 \cdot 10^3$.

6. feladat Hányféleképpen lehet kitölteni egy ötöslottó szelvényt?

Megoldásvázlat 90 számból kell 5 különbözőt kiválasztani, így ez egy ismétlés nélküli kombináció: $\binom{90}{5}$.

7. feladat Egy 20 fős öntevékeny kör csapatépítést szervez, ahol mindenki kezet fog a másikkal. Hány kézfogás történik?

Megoldásvázlat A kérdés, hogy 20 emberből hányféleképpen lehet kettő különbözőt kiválasztani. Ez is ismétlés nélküli kombináció: $\binom{20}{2}$.

8. feladat A 13 fős hallgatói képviseletnek két főt kell delegálnia egy kari bizottságba. Hányféleképpen delegálhat a tagjai közül?

Megoldásvázlat Előzőhöz hasonlóan a lehetőségek száma $\binom{13}{2}$.

9. feladat A 13 fős hallgatói képviseletnek választania kell egy iroda felelőst és egy nagyterem felelőst, akik nem lehetnek azonos személyek. Hányféleképpen választhatnak a tagjaik közül?

Megoldásvázlat Itt számít a "sorrend" (hiszen nem mindegy, hogy ki az iroda felelős és ki a nagyterem felelős), így ez egy ismétlés nélküli variáció. A lehetőségek száma: $13 \cdot 12$.

10. feladat Hány olyan háromjegyű szám van, melynek jegyei növekvő sorrendben követik egymást?

Megoldásvázlat Egy ilyen számban 0 nem szerepelhet. A maradék 9 számjegyből akárhogy választunk 3-at, abból pontosan egy megfelelő háromjegyű szám készíthető. Így ismétlés nélküli kombinációval a megfelelő háromjegyű számok száma: $\binom{9}{3}$.

11. feladat Hány olyan háromjegyű szám van, melynek jegyei csökkenő sorrendben követik egymást?

Megoldásvázlat Az előzővel ellentétben most a 0-t is használhatjuk. Viszont itt is igaz, hogy akárhogy választunk a 10 számjegyből 3 különbözőt, azokból pontosan egy megfelelő háromjegyű szám készíthető. Vagyis ezek száma: $\binom{10}{3}$.

12. feladat 10 különböző ízű fagylalt közül hányféleképpen választhatunk 3 gombócot úgy, hogy különböző fajtákat választunk? Hányféle lehetőségünk van, ha tölcsérbe kérjük (vagyis számít, hogy melyik van legalul, középen és felül)? És ha egy ízt akár többször is választhatunk?

Megoldásvázlat Az első esetben 10 különbözőből kell választani 3 különbözőt, így a lehetőségek száma $\binom{10}{3}$ (ismétlés nélküli kombináció).

Tölcsérnél számít a sorrend, így ekkor a lehetőségek száma: $10 \cdot 9 \cdot 8$ (ismétlés nélküli variáció).

Ha egy ízt többször is választhatunk, akkor az első esetben a lehetőségek száma ismétléses kombinációval számolható: $\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3}$, míg tölcsér esetén ismétléses variációval: 10^3.

13. feladat A BME focicsapatában 4 gépészmérnök, 5 építőmérnök, 6 fizikus és 8 vegyészmérnök hallgató játszik. Az egyetemek közti bajnokságon 5 fős csapatot kell kiállítani, ahol mind a négy karról kell, hogy legyen ember a csapatban. Hányféleképpen lehet összeállítani a csapatot?

Megoldásvázlat Az öt kar közül pontosan egy fog két játékost adni, a többi kar pontosan így egyet. Például azon csapatösszeállítások száma, amiben két gépészmérnök van: $\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8$. Hasonlóan számolhatók azok az esetek, amikor valamelyik másik kar ad 2 hallgatót. Ezek mind különböző esetek, így ezeket összeadva kapjuk az összes lehetőség számát:

$$\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot \binom{5}{2} \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot \binom{6}{2} \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \binom{8}{2}.$$

Másképp: Először kiválasztunk minden karról egy-egy hallgatót, erre $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8$ lehetőség van. Ezután a maradék 19 hallgatóból még egyet kell választani, de ekkor minden lehetséges csapatot pontosan kétszer számoltunk, így a csapatok száma $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 19 \cdot \frac{1}{2}$.

14. feladat Az ÉMK-n minden témavezető oktatóra jut 3 hallgató, akik között minden évben kiosztják "Az év konzulens-hallgató díját" (amit egy témavezető és az egyik hallgatója kapja). Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha 13 témavezető van összesen?

Megoldásvázlat A témavezetőt 13-féleképpen választhatjuk, akinek 3 hallgatója van, így a lehetőségek száma $13 \cdot 3 = 39$.

15. feladat 8 lány és 5 fiú vizsgázik matematikából. Mindenki különböző pontszámot szerzett.

(a) Hányféleképpen alakulhat a pontszám szerinti sorrendjük?

(b) Hányféleképpen alakulhat a pontszám szerinti sorrend, ha csak a nemek szerinti alakulást vizsgáljuk?

Megoldásvázlat

(a) Ismétlés nélküli permutációval: $13!$.

(b) Ismétléses permutációval: $\frac{13!}{8! \cdot 5!}$.

16. feladat 12 könyvből 5 matematikával, 2 statikával, 3 hidraulikával és 2 geodéziával foglalkozik. Hányféleképpen lehet a könyveket elhelyezni a könyvespolcon, ha azt szeretnénk, hogy az azonos témával foglalkozó könyvek egymás mellé kerüljenek?

Megoldásvázlat A témákon belül ismétlés nélküli permutációval számolható a sorrendek száma, például a matekkönyveket $5!$-féleképpen rendezhetjük. Ezektől függetlenül a témákat is ismétlés nélküli permutációval rakhatjuk sorba $4!$-féleképpen. Tehát összesen $5! \cdot 2 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 4!$ lehetséges sorrend van.

17. feladat Hányféleképpen tudok kihúzni a francia kártyapakliból 2 pikk és 5 egyéb (nem pikk) lapot? (A francia pakli 52 lapból áll, 4 szín, színenként 13 érték.)

Megoldásvázlat A 2 pikket $\binom{13}{2}$-féleképpen választhatjuk (ismétlés nélküli kombináció) és hasonlóan a másik 5 lapot $\binom{39}{5}$-féleképpen választhatjuk. Tehát összesen $\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{5}$ lehetőségünk van.

18. feladat 5 Palibácsi és 9 Vásárhelyi Klub tagból szeretnénk egy közös pultot kialakítani a BME Egyetemi Napokra, ahol 3 Palibácsis és 4 Vásárhelyi Klubos tag legyen. Hányféleképpen alakítható ki a közös pult, ha a Klubosok között van 2 személy, akik nem hajlandóak egy pultban dolgozni?

Megoldásvázlat A Palibácsis tagokat $\binom{5}{3}$-féleképpen választhatjuk, míg a Klubosokat $\left(\binom{9}{4} - \binom{7}{2}\right)$-féleképpen (hiszen pontosan $\binom{7}{2}$ lehetőség nem jó, azaz ennyi olyan választás van, amiben benne lenne az a két személy, akik nem hajlandók együtt dolgozni). Tehát a pultot $\binom{5}{3} \cdot \left(\binom{9}{4} - \binom{7}{2}\right)$-féleképpen alakíthatjuk ki.

19. feladat Hányféleképpen tudok kihúzni 5 lapot a magyar pakliból, ha azt akarom, hogy a tök felső köztük legyen?

Megoldásvázlat A tök felső biztosan közte van, így a maradék 31 lapból választunk ki négyet. A lehetőségek száma (ismétlés nélküli kombinációval): $\binom{31}{4}$.

20. feladat 2024-ben egy új szerencsejátékot vezetett be a Szerencsejáték Zrt., melynek neve a Napi mázli. A sorsoláson kihúznak

- egy évet, ahol csak az évszám utolsó két számjegye számít, azaz egy 00-99 közti értéket,
- egy hónapot,
- egy napot, ahol csak valós dátum szerepelhet, továbbá a szökőévektől eltekintenek, tehát a február minden év esetén 28 naposnak tekinthető,
- és egy szimbólumot a felsorolt 20 lehetőség közül.

Hányféle különböző szelvény játszható meg összesen?

Megoldásvázlat Az évet 100-féleképpen, a napot (és ezzel együtt a hónapot) 365-féleképpen, a szimbólumot 20-féleképpen választhatjuk, így $100 \cdot 365 \cdot 20$ különböző szelvény van.