Matematika A3 építőmérnököknek 7. gyakorlat
A valószínűségi modell és annak egyszerű következményei, klasszikus valószínűségi mező

Véletlen kísérletek eredményét vizsgáljuk. A lehetséges kimeneteleket **elemi esemény**eknek nevezzük, ezek összessége az **eseménytér**. Az eseménytér tetszőleges részhalmazát **esemény**nek nevezzük.

Például kockadobásnál az elemi események (a dobás lehetséges eredményei): 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az eseménytér: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Események például: $A = \{\text{párost dobunk}\}$, $B = \{\text{a dobás 1 vagy 2}\}$.

Alapfogalmak

- A és B esemény egymás **komplementer**e, ha mindig pontosan az egyik következik be közülük, jelölés: $B = \overline{A} = A^C$.
- E az A és B események **unió**ja (vagy összege), ha E pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik: $E = A + B = A \cup B$.
- F az A és B események **metszet**e (vagy szorzata), ha F pontosan akkor következik be, ha A és B is bekövetkezik: $F = A \cdot B = A \cap B$.
- G az A és B események **különbség**e, ha G pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem: $G = A - B = A \setminus B$.
- A és B **egymást kizáró események**, ha egyszerre soha nem következnek be.
- A esemény **maga után vonja** B eseményt, ha A bekövetkezése esetén B is bekövetkezik: $A \subset B$.

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A-val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűség**ének, $\mathbb{P}(A)$-val jelöljük.

A valószínűség axiómái, alaptulajdonságai

- $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ minden E eseményre
- $\mathbb{P}(S) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, ahol S az eseménytér
- Ha $A = A_1 + \cdots + A_k + \ldots$ és $A_i \cdot A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$-re, akkor $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_k) + \ldots$
- Komplementer esemény valószínűsége: $\mathbb{P}(E^C) = 1 - \mathbb{P}(E)$
- Monotonitás: ha $E \subset F$, akkor $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$
- Szitaformula két eseményre: $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$
- Szitaformula három eseményre:
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$
- Ha egy kísérletnek véges sok kimenetele lehet és ezek mind azonos valószínűséggel következnek be, akkor egy E esemény valószínűsége:
$$\mathbb{P}(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}. \tag{1}$$

1. feladat Tegyük fel, hogy A és B egymást kölcsönösen kizáró események, melyekre teljesül, hogy $\mathbb{P}(A) = 0,3$ és $\mathbb{P}(B) = 0,5$. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) A vagy B bekövetkezik?

(b) A bekövetkezik, de B nem?

(c) A és B is bekövetkezik?

2. feladat Az egyetemisták 28%-a cigarettázik, 7%-a szivarozik, 5%-a pedig cigarettázik és szivarozik.

(a) Hány százalékuk nem cigarettázik és nem is szivarozik?

(b) Hány százalékuk szivarozik, de nem cigarettázik?

3. feladat Egy kis közösség 20 családból áll. 4 családban 1 gyerek van, 8 családban 2, 5 családban 3, 2 családban 4 és 1 családban 5 gyerek található. Írjuk le a gyerekek száma szerinti eloszlást, ha

(a) a családok közül választok véletlenszerűen egyet,

(b) a gyerekek közül választunk véletlenszerűen, és megkérdezzük, hogy ő hány gyerekes családból származik!

4. feladat Feldobunk egy szabályos pénzérmét kétszer egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) dobunk fejet?

(b) pontosan egy fejet dobunk?

5. feladat Mennyi a valószínűsége annak, hogy két szabályos dobókocka feldobásakor

(a) legalább az egyik 6-os lesz?

(b) egyik sem lesz 6-os?

(c) a második kockával nagyobb számot dobunk, mint az elsővel?

6. feladat Van két szabályos dobókockánk, melyeken 2-2 lap piros, 2-2 lap fekete, 1-1 lap sárga és 1-1 lap zöld. Ezzel a két kockával egyszerre dobva mennyi a valószínűsége, hogy egyforma színű oldalaik lesznek felül?

7. feladat Mennyi a valószínűsége, hogy egy háromgyerekes családban a gyerekek mind egyneműek? (A matematika az egyszerűbb számítások végett kellően konzervatív, tehát csak lány és fiú gyerekek vannak, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel.)

8. feladat Legalább hány szabályos pénzérmét kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb esély legyen arra, hogy lesz köztük fej?

9. feladat Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy mind a hat szám előjön?

10. feladat Anna, Béla, Cecil, Dezső és Emese véletlenszerűen sorba állnak. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) pontosan egy ember lesz Anna és Béla között?

(b) pontosan két ember lesz Anna és Béla között?

(c) pontosan három ember lesz Anna és Béla között?

11. feladat Mennyi a valószínűsége, hogy az ötöslottón pontosan két találatunk lesz?

12. feladat Egy erdőben 20 őz él, melyekből ötöt befogtak, megjelöltek, majd visszaengedték őket az erdőbe. Később ebből a 20 őzből négyet befogtak újra. Mennyi a valószínűsége, hogy a négyből pontosan kettő van megjelölve? Milyen feltételezéssel éltünk?

13. feladat Egy konferencián 30 építőmérnök és 24 építészmérnök vesz részt. Az 54 résztvevőből hat főt véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy legalább 1 építőmérnök lesz köztük?