Matematika A3 építőmérnököknek 7. gyakorlat
A valószínűségi modell és annak egyszerű következményei, klasszikus valószínűségi mező

Véletlen kísérletek eredményét vizsgáljuk. A lehetséges kimeneteleket **elemi esemény**eknek nevezzük, ezek összessége az **eseménytér**. Az eseménytér tetszőleges részhalmazát **esemény**nek nevezzük.

Például kockadobásnál az elemi események (a dobás lehetséges eredményei): 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az eseménytér: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Események például: $A = \{\text{párost dobunk}\}$, $B = \{\text{a dobás 1 vagy 2}\}$.

Alapfogalmak

- A és B esemény egymás **komplementer**e, ha mindig pontosan az egyik következik be közülük, jelölés: $B = \overline{A} = A^C$.
- E az A és B események **unió**ja (vagy összege), ha E pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik: $E = A + B = A \cup B$.
- F az A és B események **metszet**e (vagy szorzata), ha F pontosan akkor következik be, ha A és B is bekövetkezik: $F = A \cdot B = A \cap B$.
- G az A és B események **különbség**e, ha G pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem: $G = A - B = A \setminus B$.
- A és B **egymást kizáró események**, ha egyszerre soha nem következnek be.
- A esemény **maga után vonja** B eseményt, ha A bekövetkezése esetén B is bekövetkezik: $A \subset B$.

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A-val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűség**ének, $\mathbb{P}(A)$-val jelöljük.

A valószínűség axiómái, alaptulajdonságai

- $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ minden E eseményre
- $\mathbb{P}(S) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, ahol S az eseménytér
- Ha $A = A_1 + \dots + A_k + \dots$ és $A_i \cdot A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$-re, akkor $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_k) + \dots$
- Komplementer esemény valószínűsége: $\mathbb{P}(E^C) = 1 - \mathbb{P}(E)$
- Monotonitás: ha $E \subset F$, akkor $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$
- Szitaformula két eseményre: $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$
- Szitaformula három eseményre:
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$
- Ha egy kísérletnek véges sok kimenetele lehet és ezek mind azonos valószínűséggel következnek be, akkor egy E esemény valószínűsége:
$$\mathbb{P}(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}. \tag{1}$$

1. feladat Tegyük fel, hogy A és B egymást kölcsönösen kizáró események, melyekre teljesül, hogy $\mathbb{P}(A) = 0,3$ és $\mathbb{P}(B) = 0,5$. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) A vagy B bekövetkezik?

(b) A bekövetkezik, de B nem?

(c) A és B is bekövetkezik?

Megoldásvázlat A és B egymást kölcsönösen kizáró események, azaz egyszerre nem következhetnek be. Ez alapján:

(a) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,3 + 0,5 - 0 = 0,8$

(b) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,3$

(c) $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$

2. feladat Az egyetemisták 28%-a cigarettázik, 7%-a szivarozik, 5%-a pedig cigarettázik és szivarozik.

(a) Hány százalékuk nem cigarettázik és nem is szivarozik?

(b) Hány százalékuk szivarozik, de nem cigarettázik?

Megoldásvázlat Legyen C az az esemény, hogy egy véletlenül választott egyetemista cigarettázik és S az az esemény, hogy szivarozik. Ekkor

(a) Komplementer esemény valószínűségét és a szitaformulát használva: $1 - \mathbb{P}(C \cup S) = 1 - (0,28 + 0,07 - 0,05) = 0,7$

(b) $\mathbb{P}(S \setminus C) = 0,07 - 0,05 = 0,02$

3. feladat Egy kis közösség 20 családból áll. 4 családban 1 gyerek van, 8 családban 2, 5 családban 3, 2 családban 4 és 1 családban 5 gyerek található. Írjuk le a gyerekek száma szerinti eloszlást, ha

(a) a családok közül választok véletlenszerűen egyet,

(b) a gyerekek közül választunk véletlenszerűen, és megkérdezzük, hogy ő hány gyerekes családból származik!

Megoldásvázlat

(a) Legyen X egy véletlenül választott családban a gyerekek száma. Ekkor X lehetséges értékei 1, 2, 3, 4 és 5 (vagyis csak ezeket az értékeket veheti fel pozitív valószínűséggel). X eloszlása:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X=1) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(X=2) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}, \quad \mathbb{P}(X=3) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \\ &\mathbb{P}(X=4) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}, \quad \mathbb{P}(X=5) = \frac{1}{20}. \end{aligned} \tag{2}$$

(b) Legyen Y egy véletlenül választott gyerek családjában a gyerekek száma. Először is számoljuk össze, hogy összesen $4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 48$ gyerek van a közösségben. Közülük 4 él egygyerekes családban, 16 kétgyerekes családban, …, így Y eloszlása:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y=1) = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}, \quad \mathbb{P}(Y=2) = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(Y=3) = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}, \\ &\mathbb{P}(Y=4) = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(Y=5) = \frac{5}{48}. \end{aligned} \tag{3}$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy X és Y esetében is a kiszámolt valószínűségeket összeadva 1-et kapunk! Ez nem véletlen, ez mutatja azt, hogy X és Y összes lehetséges értékének megadtuk a valószínűségét. X és Y is egy diszkrét valószínűségi változó, ezekről később fogunk tanulni.

4. feladat Feldobunk egy szabályos pénzérmét kétszer egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) dobunk fejet?

(b) pontosan egy fejet dobunk?

Megoldásvázlat Az (1) képletet fogjuk használni. A két dobást nézve összesen 4 lehetőségünk (elemi eseményünk) van:

$$\{FF, FI, IF, II\}.$$

(a) A fenti elemi események közül 3 esetben is dobtunk fejet, így a keresett valószínűség $\frac{3}{4}$.

(b) Két elemi eseménynél van pontosan egy fejdobás (FI és IF), így a valószínűség: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Megjegyzés: Fontos volt, hogy megkülönböztettük az FI és az IF elemi eseményeket. Az eseményteret felbonthattuk volna az alapján is, hogy hány fejet dobunk (0, 1 vagy 2), de ezek az események nem egyforma valószínűségűek (nem elemi események), így ebben az esetben az (1) nem adna jó megoldást.

5. feladat Mennyi a valószínűsége annak, hogy két szabályos dobókocka feldobásakor

(a) legalább az egyik 6-os lesz?

(b) egyik sem lesz 6-os?

(c) a második kockával nagyobb számot dobunk, mint az elsővel?

Megoldásvázlat Összesen 36 elemi eseményünk van (mi a két dobás eredménye). Így (1) alapján:

(a) $\frac{11}{36}$

(b) Az előző komplementere: $\frac{25}{36}$

(c) Egyrészt összeszámolhatjuk, hogy az elemi események közül 15 ilyen van, így a valószínűség $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.
Másik megoldás, hogy észrevesszük, hogy $\frac{1}{6}$ valószínűséggel egyezik meg a két dobás, azaz $\frac{5}{6}$ valószínűséggel különböznek és ezek között (szimmetria miatt) ugyanannyi esetben lesz az első a nagyobb, mint amennyiben a második a nagyobb, azaz a keresett valószínűség $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$.

6. feladat Van két szabályos dobókockánk, melyeken 2-2 lap piros, 2-2 lap fekete, 1-1 lap sárga és 1-1 lap zöld. Ezzel a két kockával egyszerre dobva mennyi a valószínűsége, hogy egyforma színű oldalaik lesznek felül?

Megoldásvázlat Annak a valószínűsége, hogy mindkettőn piros van felül $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Ugyanígy $\frac{1}{9}$ valószínűséggel lesz mindkettő fekete, illetve hasonlóan számolva sárga vagy zöld is $\frac{1}{36}$ valószínűséggel lesz mindkét kocka felül. Mivel ezek diszjunkt események, összesen $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ valószínűséggel lesznek felül egyforma színű oldalak.

7. feladat Mennyi a valószínűsége, hogy egy háromgyerekes családban a gyerekek mind egyneműek? (A matematika az egyszerűbb számítások végett kellően konzervatív, tehát csak lány és fiú gyerekek vannak, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel.)

Megoldásvázlat Összesen 8 elemi esemény van, ebből 2 esetben lesznek egyneműek a gyerekek, így a valószínűség $\frac{1}{4}$.

8. feladat Legalább hány szabályos pénzérmét kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb esély legyen arra, hogy lesz köztük fej?

Megoldásvázlat Ha n db érmét dobunk fel, akkor annak a valószínűsége, hogy van köztük fej: $1 - \frac{1}{2^n}$ (komplementer eseményt számolva). Tehát azt a legkisebb n egész számot keressük, amire $1 - \frac{1}{2^n} > 0.9$. Átrendezve $n > \log_2(10)$, vagyis $n \geq 4$.

9. feladat Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy mind a hat szám előjön?

Megoldásvázlat Összesen 6^6 elemi esemény van. Ebből $6!$ olyan, aminél mindegyik szám előjön, tehát $\frac{6!}{6^6}$.

10. feladat Anna, Béla, Cecil, Dezső és Emese véletlenszerűen sorba állnak. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) pontosan egy ember lesz Anna és Béla között?

(b) pontosan két ember lesz Anna és Béla között?

(c) pontosan három ember lesz Anna és Béla között?

Megoldásvázlat Összesen $5! = 120$-féleképpen tudnak sorba állni.

(a) 3-féleképpen tudjuk kiválasztani, hogy ki áll közöttük és ettől függetlenül 2-féleképpen, hogy Anna és Béla közül ki áll előrébb. Ekkor Annát, Bélát és az általuk közrefogott embert egy egységként kezelve $3!$ lehetséges sorrend van. Így a megfelelő sorrendek száma: $3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$ és a valószínűség $\frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

Másképp: ha Anna a sor közepén áll, akkor Béla valamelyik szélen kell álljon, ez 2 lehetőség. Ha Anna nem középen áll, akkor Bélának pontosan 1 megfelelő helye van, ez 4 lehetőség. Ezt a $2 + 4 = 6$ lehetőséget kell szorozni $3!$-sal, hiszen a másik 3 ember ennyiféle sorrendben állhat. Ebből a valószínűség hasonlóan számolható.

(b) Most $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen tudjuk kiválasztani, hogy kik álljanak Anna és Béla között (a sorrendet is figyelembe véve). Anna és Béla továbbra is kétféleképpen állhat és most egy 2 szorzó van még amiatt, hogy Annáék állnak elől vagy az 5. ember. Így a megfelelő sorrendek száma: $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ és a valószínűség: $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

Másképp: Anna nem állhat középen, minden más esetben Béla helye egyértelmű, így ők 4-féleképpen helyezkedhetnek, amihez $4 \cdot 3!$ megfelelő sorrend tartozik. Ebből a valószínűség hasonlóan számolható.

(c) Ekkor Anna és Béla a sor két szélén áll (kétféle lehetséges sorrendben) és a közöttük lévő 3 ember $3!$ különböző sorrendben állhat. Így a sorrendek száma: $2 \cdot 3! = 12$, a valószínűség: $\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$.

11. feladat Mennyi a valószínűsége, hogy az ötöslottón pontosan két találatunk lesz?

Megoldásvázlat Összesen $\binom{90}{5}$-féleképpen lehet kiválasztani az 5 számot. Ebből $\binom{5}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani, hogy melyik kettőt találtuk el és $\binom{85}{3}$-féleképpen, hogy melyik 3-at nem. Tehát a valószínűség:

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

12. feladat Egy erdőben 20 őz él, melyekből ötöt befogtak, megjelöltek, majd visszaengedték őket az erdőbe. Később ebből a 20 őzből négyet befogtak újra. Mennyi a valószínűsége, hogy a négyből pontosan kettő van megjelölve? Milyen feltételezéssel éltünk?

Megoldásvázlat Összesen $\binom{20}{4}$-féleképpen választhatjuk ki a 4 őzt. Ebből $\binom{5}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani két megjelöltet és $\binom{15}{2}$-féleképpen két nem megjelöltet. Tehát a valószínűség:

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{2}}{\binom{20}{4}}.$$

Azt feltételeztük, hogy minden őzt ugyanakkora valószínűséggel és egymástól függetlenül fogtunk be mindkét alkalommal.

13. feladat Egy konferencián 30 építőmérnök és 24 építészmérnök vesz részt. Az 54 résztvevőből hat főt véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy legalább 1 építőmérnök lesz köztük?

Megoldásvázlat Összesen $\binom{54}{6}$-féleképpen tudunk kiválasztani 6 résztvevőt. Ebből $\binom{24}{6}$-féleképpen tudunk 6 építészmérnököt kiválasztani, ami pont kérdezett esemény komplementere. Így a válószínűség:

$$1 - \frac{\binom{24}{6}}{\binom{54}{6}}.$$