Matematika A3 építőmérnököknek 8. gyakorlat
Feltételes valószínűség, függetlenség

Feltételes valószínűség

Legyen B olyan esemény, amelyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$! Ekkor A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége azt fejezi ki, hogy azon eseteknek, amikor B bekövetkezik, hányad részében következik be A esemény is:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1}$$

Szorzási szabály: $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}(E_n|E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1})$.

Teljes valószínűségi tétel: Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer (azaz bármely kettő metszete üres és az uniójuk lefedi a teljes eseményteret)! Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) + \ldots$$

Bayes-tétel: Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer! Ekkor minden k-ra

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A|B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A|B_i)}.$$

1. feladat Egy szabályos dobókockát feldobva mi a valószínűsége annak, hogy hatost dobunk, ha tudjuk, hogy
(a) párosat dobtunk? (b) a dobott szám értéke legalább 3? (c) a dobott szám értéke legfeljebb 5?

2. feladat Egyszerre feldobunk két szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy dobtunk kettest? És mennyi a valószínűsége, hogy dobtunk kettest, feltéve, hogy a két dobott szám összege hat?

3. feladat A magyar háztartások 36%-a kutyát, 30%-a macskát tart, továbbá tudjuk, hogy a kutyatulajdonosok 22%-a macskát is tart.

(a) A háztartások mekkora része tart kutyát is és macskát is?

(b) A macskatulajdonosok mekkora része tart kutyát is?

4. feladat Egy dobozban van 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó.

(a) Véletlenszerűen kihúzok egy golyót, majd visszateszem, majd kihúzok még egyet, azt is visszateszem, majd végül kihúzok egy harmadik golyót is és közben mindegyiknek felírom a színét. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra pedig zöldet húztam?

(b) Mennyi lenne a valószínűség, ha a golyókat közben nem tettem volna vissza?

5. feladat Egy építőipari beszerzési eljáráson annak a valószínűsége, hogy a Market pályázatát sikeresnek ítélik 0,6, míg az Óbuda Group esetében a siker valószínűsége 0,7. Két projektre keresünk vállalkozót, és a beérkezett pályázatokról beérkezési sorrendben hozunk döntést, hogy melyik projektekre alkalmas. A vállalkozók pályázatának beérkezési sorrendje véletlenszerű, azaz $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel érkezik be a Market vagy az Óbuda Group előbb. Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőként beérkező vállalkozó

(a) az első projektünkre jó pályázatot ad be?

(b) mindkét projektünkre jó pályázatot ad be?

(c) pontosan egy projektünkre ad be jó pályázatot?

6. feladat Egy francia paklit négy játékosnak egyenlően szétosztva mennyi a valószínűsége, hogy mindenkihez került ász?

7. feladat Egy gyárban három gépsoron gyártják az alkatrészeket, viszont minden gépsoron keletkezik selejt. Ezek arányát, továbbá a teljes legyártott mennyiség gépsorok szerinti eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:

Gépsor	Gyártás	Selejt aránya
1. gépsor	25%	5%
2. gépsor	35%	4%
3. gépsor	40%	2%

(a) Az 1. gépsorról véletlenszerűen választva egy alkatrészt mennyi a valószínűsége, hogy selejtes?

(b) Egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész mekkora valószínűséggel származik a 2. gépsorról?

(c) Véletlenszerűen választottunk egy alkatrészt, amiről kiderült, hogy hibás. Mennyi a valószínűsége, hogy a 3. gépsorról származik?

Függetlenség

A és B esemény, melyre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, független, ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C)$.

Megjegyzés: $\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$ esetén A és B mindig független.

Tétel: A és B pontosan akkor független, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

8. feladat Van egy piros és egy zöld szabályos dobókockánk, melyeket egyszerre dobunk fel. Tekintsük az alábbi eseményeket:

$A = \{\text{a dobott számok összege 7}\}$, $B = \{\text{dobtunk hatost}\}$, $C = \{\text{páratlanokat dobtunk}\}$,
$D = \{\text{különböző számokat dobtunk}\}$, $E = \{\text{a zöld kockával négyest dobtunk}\}$

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket!

(a) Mennyi a különböző események valószínűsége?

(b) A és C események függetlenek?

(c) A és C események egymást kölcsönösen kizáró események?

(d) A és D események függetlenek?

(e) A és E események függetlenek?

(f) A és E események egymást kölcsönösen kizáró események?

9. feladat Tekintsünk három várost és az őket összekötő úthálózatot. Éjjel hóvihar tombol a környéken, ami p valószínűséggel egymástól függetlenül eltorlaszolhat egy-egy útszakaszt, ami miatt az másnap járhatatlan. Mi másnap A-ból szeretnénk eljutni C-be.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy sikeresen el tudunk jutni az utak mentén, ha minden várost pontosan 1 út köt össze a többivel?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy sikeresen el tudunk jutni az utak mentén, ha A-ból B-be kettő egymástól független útszakasz, míg B-ből C-be egy út vezet?

10. feladat Egy televíziós vetélkedőn az alábbi történik: Van három ajtó, amiből egy mögött egy értékes új autó, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske található. Kiválasztok egy ajtót, majd a műsorvezető kinyit egy másikat, ami mögött kecske van. Ezután megváltoztathatom a döntésemet vagy maradhatok az eredetileg kiválasztott ajtónál. Érdemes-e váltanom?

További példák

11. feladat Egy iskolában minden diáknak és tanárnak van egy egészségügyi kartonja, amiben nyilvántartják, hogy ki betegedett már meg az adott tanévben. Az adatokra vonatkozó összesítő táblázat a következő:

	Beteg	Egészséges
Lány diák	50	60
Fiú diák	40	80
Tanár	10	20

(a) A kartonokból véletlenszerűen húzva mennyi a valószínűsége, hogy egy beteg ember kartonját veszem ki?

(b) A kartonokból véletlenszerűen húzva mennyi a valószínűsége, hogy egy lány diák kartonját húzom ki?

(c) A kartonokból véletlenszerűen húzva mennyi a valószínűsége, hogy egy beteg fiú diák kartonját húzom ki?

(d) Mennyi a valószínűsége, hogy egy beteg lány diák kartonját húzom ki, feltéve, hogy a lány diákok kartonjai közül húzunk?

(e) Mennyi a valószínűsége, hogy egy tanár kartonját húzom ki, feltéve, hogy a betegek kartonjai közül húzunk?

(f) Mennyi a valószínűsége, hogy először egy fiú diák, aztán egy lány diák kartonját húzzuk ki, ha a betegek kartonjai közül húzunk, és az első húzás után a kartont nem rakjuk vissza?

(g) Mennyi a valószínűsége, hogy először egy fiú diák, aztán szintén egy fiú diák kartonját húzzuk ki, ha a betegek kartonjai közül húzunk, és az első húzás után a kartont nem rakjuk vissza?

12. feladat 2 golyót $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel arany vagy fekete színűre festenek, majd berakják őket egy dobozba.

(a) Látjuk, hogy az arany színű festéket használták, így feltételezzük, hogy van arany golyó. Ezzel a feltevéssel élve mennyi a valószínűsége, hogy mindkét golyó arany színű?

(b) Kiveszek egy golyót a dobozból, ami arany. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik golyó is arany színű?

13. feladat A Vásárhelyi Pál Kollégiumban csótányirtást végeztek, mely három turnusból állt. Az első irtásnál elpusztult a csótányok 60%-a, a másodiknál a még élő csótányok 40%-a, majd az utolsó irtásnál a még életben lévők 20%-a.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy csótány túlélte ezt az akciót?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy csótány pontosan a 3. irtásnál pusztult el?

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy egy csótány túléli az irtást, feltéve, hogy az első kör után még látták, hogy él?

14. feladat A tartók statikája tárgy vizsgája áll egy beugróból, aztán a sikeresen teljesítők mehetnek írásbelizni, majd akik ezen is sikeresen szerepelnek, mehetnek tovább szóbeli vizsgára. A beugrón a hallgatók 90%-a, az írásbelin 80%-a, szóbelin pedig a 70%-a veszi sikerrel az akadályokat.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató sikeresen teljesíti az egész vizsgát?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott hallgatónak az írásbelije lesz sikertelen, feltéve, hogy tudjuk, hogy sikertelen lett a vizsgája?

15. feladat A Drönkben $\frac{1}{3}$ valószínűséggel Jägert, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel Unicumot rendelünk. A pultosok jókedve miatt Jäger helyett Unicumot kapunk $\frac{1}{4}$ valószínűséggel, Unicum helyett pedig Jägert $\frac{1}{5}$ valószínűséggel. Mennyi a valószínűsége, hogy Unicumot kapunk?

16. feladat A zsebemben három pénzérme van. Egy köztük olyan, mellyel 0,5 valószínűséggel, a két másikkal $0,6-0,6$ valószínűséggel dobok fejet. Találomra kiveszem az egyik pénzérmét és háromszor feldobom.

(a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás fej lesz?

(b) Feltéve, hogy mindhárom dobás fej lett, mi a valószínűsége, hogy a szabályos érmével dobtam?

17. feladat Egy spam-szűrő program úgy működik, hogy a spamekben gyakran előforduló szavakat figyeli. Tegyük fel, hogy az e-mailek 80%-a spam. A spamek 10%-ában az "ingyen" szó előfordul, míg ugyanez a szó a rendes e-maileknek csupán 1%-ában olvasható. Egy most érkezett e-mailben az "ingyen" szó olvasható. Mi a valószínűsége, hogy az spam?

18. feladat Van egy cinkelt érmém, ami fejet mutat $0,6$ valószínűséggel.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy négyszer feldobva mind a négyszer fejet fog mutatni?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy négyszer feldobva először írást, aztán háromszor fejet fog mutatni?

19. feladat Egy érmét háromszor feldobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy legfeljebb egy fejet dobtunk és B azt, hogy fejet és írást is dobtunk. Függetlenek-e az A és B események?