Matematika A3 építőmérnököknek 8. gyakorlat
Feltételes valószínűség, függetlenség

Feltételes valószínűség

Legyen B olyan esemény, amelyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$! Ekkor A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége azt fejezi ki, hogy azon eseteknek, amikor B bekövetkezik, hányad részében következik be A esemény is:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1}$$

Szorzási szabály: $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n|E_1 \cap \dots \cap E_{n-1})$.

Teljes valószínűségi tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer (azaz bármely kettő metszete üres és az uniójuk lefedi a teljes eseményteret)! Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) + \dots$$

Bayes-tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer! Ekkor minden k-ra

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A|B_k)}{\sum\limits_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A|B_i)}.$$

1. feladat Egy szabályos dobókockát feldobva mi a valószínűsége annak, hogy hatost dobunk, ha tudjuk, hogy
(a) párosat dobtunk? (b) a dobott szám értéke legalább 3? (c) a dobott szám értéke legfeljebb 5?

Megoldásvázlat A feltételes valószínűség (1) definíciója alapján könnyen számolhatók (A az az esemény, hogy hatost dobunk, B pedig mindegyik részfeladatban az adott feltétel):
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 0

2. feladat Egyszerre feldobunk két szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy dobtunk kettest? És mennyi a valószínűsége, hogy dobtunk kettest, feltéve, hogy a két dobott szám összege hat?

Megoldásvázlat Legyen A az az esemény, hogy dobtunk kettest, B pedig, hogy a két dobott szám összege hat! Ekkor a feltétel nélkül a valószínűség: $\mathbb{P}(A) = \frac{11}{36}$.

A feltételes esetben (1) alapján számolhatunk. Összesen 5 olyan elemi esemény van, amikor az összeg hat, ebből 2 olyan, amikor volt közte kettes, így a feltételes valószínűség:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}.$$

Megjegyzés: Ahogy itt is látszódik, feltételes valószínűséget úgy is számolhatunk, hogy megnézzünk, hogy hány elemi esemény esik bele a B feltételbe (a fenti példában 5) és ezek közül hány esik bele az A eseménybe is (a fenti példában 2). Ekkor a feltételes valószínűség ezek hányadosával egyenlő.

3. feladat A magyar háztartások 36%-a kutyát, 30%-a macskát tart, továbbá tudjuk, hogy a kutyatulajdonosok 22%-a macskát is tart.

(a) A háztartások mekkora része tart kutyát is és macskát is?

(b) A macskatulajdonosok mekkora része tart kutyát is?

Megoldásvázlat Legyen K és M az az esemény, hogy egy véletlenszerűen választott magyar háztartásban van kutya, illetve macska!

(a) Szorzási szabály alapján: $\mathbb{P}(K \cap M) = \mathbb{P}(K) \cdot \mathbb{P}(M|K) = 0,36 \cdot 0,22 = 0,0792$.

(b) A feltételes valószínűség definíciója alapján: $\mathbb{P}(K|M) = \frac{0,0792}{0,3} = 0,264$.

4. feladat Egy dobozban van 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó.

(a) Véletlenszerűen kihúzok egy golyót, majd visszateszem, majd kihúzok még egyet, azt is visszateszem, majd végül kihúzok egy harmadik golyót is és közben mindegyiknek felírom a színét. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra pedig zöldet húztam?

(b) Mennyi lenne a valószínűség, ha a golyókat közben nem tettem volna vissza?

Megoldásvázlat

(a) $\frac{3}{14} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{14} \approx 0,033$

(b) Szorzási szabállyal: $\frac{3}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{6}{12} \approx 0,041$.

5. feladat Egy építőipari beszerzési eljáráson annak a valószínűsége, hogy a Market pályázatát sikeresnek ítélik 0,6, míg az Óbuda Group esetében a siker valószínűsége 0,7. Két projektre keresünk vállalkozót, és a beérkezett pályázatokról beérkezési sorrendben hozunk döntést, hogy melyik projektekre alkalmas. A vállalkozók pályázatának beérkezési sorrendje véletlenszerű, azaz $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel érkezik be a Market vagy az Óbuda Group előbb. Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőként beérkező vállalkozó

(a) az első projektünkre jó pályázatot ad be?

(b) mindkét projektünkre jó pályázatot ad be?

(c) pontosan egy projektünkre ad be jó pályázatot?

Megoldásvázlat Legyen M és O az az esemény, hogy az elsőként beérkező vállalkozó a Market, illetve az Óbuda Group! Ekkor M és O események egy teljes eseményrendszert alkotnak.

(a) Legyen A az az esemény, hogy az elsőként beérkező vállalkozó az első projektünkre jó pályázatot ad be! Ekkor teljes valószínűség tételével:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|M) \cdot \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A|O) \cdot \mathbb{P}(O) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,5 = 0,65.$$

(b) Legyen B az az esemény, hogy az elsőként beérkező vállalkozó mindkét projektünkre jó pályázatot ad be! Ekkor teljes valószínűség tételével:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|M) \cdot \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(B|O) \cdot \mathbb{P}(O) = 0,6^2 \cdot 0,5 + 0,7^2 \cdot 0,5 = 0,425.$$

(c) Legyen C az az esemény, hogy az elsőként beérkező vállalkozó pontosan egy projektünkre ad be jó pályázatot! Ekkor

$$\mathbb{P}(C|M) = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,48, \quad \mathbb{P}(C|O) = 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,42.$$

Így megint teljes valószínűség tételével tudunk számolni:

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|M) \cdot \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(C|O) \cdot \mathbb{P}(O) = 0,48 \cdot 0,5 + 0,42 \cdot 0,5 = 0,45.$$

6. feladat Egy francia paklit négy játékosnak egyenlően szétosztva mennyi a valószínűsége, hogy mindenkihez került ász?

Megoldásvázlat 52 lap van, amiből 4 ász, így mindenki 13 lapot kap és akkor kerülhet mindenkihez ász, ha mindenki pontosan egy ászt kap. Legyen J_i az az esemény, hogy az i-edik játékos pontosan egy ászt kapott ($i = 1$, 2, 3 vagy 4)! Szorzási szabállyal számolunk. Ehhez előbb kiszámoljuk az alábbi valószínűségeket:

$$\mathbb{P}(J_1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}, \quad \mathbb{P}(J_2|J_1) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{36}{12}}{\binom{39}{13}}, \quad \mathbb{P}(J_3|J_1 \cap J_2) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{24}{12}}{\binom{26}{13}}, \quad \mathbb{P}(J_4|J_1 \cap J_2 \cap J_3) = 1.$$

Ekkor a keresett valószínűség a fentiek szorzataként számolható:

$$\mathbb{P}(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4) = \mathbb{P}(J_1) \cdot \mathbb{P}(J_2|J_1) \cdot \mathbb{P}(J_3|J_1 \cap J_2) \cdot \mathbb{P}(J_3|J_1 \cap J_2) \cdot \mathbb{P}(J_4|J_1 \cap J_2 \cap J_3).$$

7. feladat Egy gyárban három gépsoron gyártják az alkatrészeket, viszont minden gépsoron keletkezik selejt. Ezek arányát, továbbá a teljes legyártott mennyiség gépsorok szerinti eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:

Gépsor	Gyártás	Selejt aránya
1. gépsor	25%	5%
2. gépsor	35%	4%
3. gépsor	40%	2%

(a) Az 1. gépsorról véletlenszerűen választva egy alkatrészt mennyi a valószínűsége, hogy selejtes?

(b) Egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész mekkora valószínűséggel származik a 2. gépsorról?

(c) Véletlenszerűen választottunk egy alkatrészt, amiről kiderült, hogy hibás. Mennyi a valószínűsége, hogy a 3. gépsorról származik?

Megoldásvázlat

(a) A táblázatból kiolvasva $0,05$.

(b) A táblázatból kiolvasva $0,35$.

(c) Legyen G_i az az esemény, hogy a véletlenül választott alkatrész az i-edik gépsorról származik ($i = 1$, 2 vagy 3) és H az az esemény, hogy ez hibás! Ekkor G_1, G_2 és G_3 teljes eseményrendszert alkot és a kérdezett valószínűség Bayes-tétellel számolható:

$$\mathbb{P}(G_3|H) = \frac{\mathbb{P}(H|G_3) \cdot \mathbb{P}(G_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3} \mathbb{P}(H|G_i) \cdot \mathbb{P}(G_i)} = \frac{0,02 \cdot 0,4}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4}.$$

Függetlenség

A és B esemény, melyre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, független, ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C)$.

Megjegyzés: $\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$ esetén A és B mindig független.

Tétel: A és B pontosan akkor független, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

8. feladat Van egy piros és egy zöld szabályos dobókockánk, melyeket egyszerre dobunk fel. Tekintsük az alábbi eseményeket:

$A = \{\text{a dobott számok összege 7}\}$, $B = \{\text{dobtunk hatost}\}$, $C = \{\text{páratlanokat dobtunk}\}$,
$D = \{\text{különböző számokat dobtunk}\}$, $E = \{\text{a zöld kockával négyest dobtunk}\}$

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket!

(a) Mennyi a különböző események valószínűsége?

(b) A és C események függetlenek?

(c) A és C események egymást kölcsönösen kizáró események?

(d) A és D események függetlenek?

(e) A és E események függetlenek?

(f) A és E események egymást kölcsönösen kizáró események?

Megoldásvázlat

(a) $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{9}{36}$, $\mathbb{P}(D) = \frac{30}{36}$, $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{6}$.

(b) $\mathbb{P}(A \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$, így nem függetlenek.

(c) Igen.

(d) $\mathbb{P}(A \cap D) = \frac{6}{36} \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(D)$, így nem függetlenek.

(e) $\mathbb{P}(A \cap E) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(E)$, így függetlenek.

(f) Nem.

Megjegyzés: Egymást kizáró események nem lehetnek függetlenek (kivéve, ha valamelyik esemény valószínűsége 0).

9. feladat Tekintsünk három várost és az őket összekötő úthálózatot. Éjjel hóvihar tombol a környéken, ami p valószínűséggel egymástól függetlenül eltorlaszolhat egy-egy útszakaszt, ami miatt az másnap járhatatlan. Mi másnap A-ból szeretnénk eljutni C-be.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy sikeresen el tudunk jutni az utak mentén, ha minden várost pontosan 1 út köt össze a többivel?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy sikeresen el tudunk jutni az utak mentén, ha A-ból B-be kettő egymástól független útszakasz, míg B-ből C-be egy út vezet?

Megoldásvázlat

(a) Két egymástól független út van: A-ból mehetünk közvetlenül C-be vagy B-n keresztül. Legyen E az az esemény, hogy az első út járható és F az, hogy a második út járható! Ekkor $\mathbb{P}(E) = 1-p$, $\mathbb{P}(F) = (1-p)^2$, így szitaformulával:

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)-\mathbb{P}(E \cap F) = (1-p)+(1-p)^2-\mathbb{P}(E)\cdot\mathbb{P}(F) = (1-p)+(1-p)^2-(1-p)^3,$$

ahol használtuk, hogy E és F függetlenek, hiszen diszjunkt utakból állnak.

(b) Ebben az esetben pontosan akkor tudunk eljutni A-ból C-be, ha A és B között legalább az egyik út járható (ennek valószínűsége $1-p^2$) és a B és C közötti út is járható (ennek valószínűsége $1-p$). Így annak a valószínűsége, hogy el tudunk jutni A-ból C-be: $(1-p^2) \cdot (1-p)$.

10. feladat Egy televíziós vetélkedőn az alábbi történik: Van három ajtó, amiből egy mögött egy értékes új autó, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske található. Kiválasztok egy ajtót, majd a műsorvezető kinyit egy másikat, ami mögött kecske van. Ezután megváltoztathatom a döntésemet vagy maradhatok az eredetileg kiválasztott ajtónál. Érdemes-e váltanom?

Megoldásvázlat Eredetileg $\frac{1}{3}$ eséllyel találtam el az autót rejtő ajtót. Mivel a műsorvezető mindig ki tud választani a másik kettő közül olyan ajtót, ami mögött kecske van, az eredetileg választott ajtó mögött továbbra is $\frac{1}{3}$ valószínűséggel van az autó. Ez viszont azt is jelenti, hogy $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a másik ajtó mögött van az autó. Tehát érdemes változtatni a döntésen.

Érdemes úgy is átgondolni, hogy eredetileg $\frac{2}{3}$ eséllyel egy kecskét rejtő ajtót választottunk. Ezekben az esetekben viszont a műsorvezető a másik kecskét rejtő ajtót fogja kinyitni, így ilyenkor mindig a másik ajtó rejti az autót.

Megjegyzés: A feladatban leírt problémát Monty Hall-paradoxonnak is hívják. Részletesebb leírás található itt: https://hu.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall-paradoxon.

További példák

11. feladat Egy iskolában minden diáknak és tanárnak van egy egészségügyi kartonja, amiben nyilvántartják, hogy ki betegedett már meg az adott tanévben. Az adatokra vonatkozó összesítő táblázat a következő:

	Beteg	Egészséges
Lány diák	50	60
Fiú diák	40	80
Tanár	10	20

(a) A kartonokból véletlenszerűen húzva mennyi a valószínűsége, hogy egy beteg ember kartonját veszem ki?

(b) A kartonokból véletlenszerűen húzva mennyi a valószínűsége, hogy egy lány diák kartonját húzom ki?

(c) A kartonokból véletlenszerűen húzva mennyi a valószínűsége, hogy egy beteg fiú diák kartonját húzom ki?

(d) Mennyi a valószínűsége, hogy egy beteg lány diák kartonját húzom ki, feltéve, hogy a lány diákok kartonjai közül húzunk?

(e) Mennyi a valószínűsége, hogy egy tanár kartonját húzom ki, feltéve, hogy a betegek kartonjai közül húzunk?

(f) Mennyi a valószínűsége, hogy először egy fiú diák, aztán egy lány diák kartonját húzzuk ki, ha a betegek kartonjai közül húzunk, és az első húzás után a kartont nem rakjuk vissza?

(g) Mennyi a valószínűsége, hogy először egy fiú diák, aztán szintén egy fiú diák kartonját húzzuk ki, ha a betegek kartonjai közül húzunk, és az első húzás után a kartont nem rakjuk vissza?

Megoldásvázlat

(a) Összesen 260 karton van, amiből 100 beteg emberé. Így a valószínűség: $\frac{100}{260}$.

(b) Az előzőhöz hasonlóan számolható: $\frac{110}{260}$.

(c) Az előzőhöz hasonlóan számolható: $\frac{40}{260}$.

(d) A kérdés egy feltételes valószínűség, amit (1) alapján tudunk számolni. A valószínűség: $\frac{50}{110}$.

(e) Az előzőhöz hasonlóan számolható: $\frac{10}{100}$.

(f) Ezt a feladatot a szorzási szabállyal tudjuk megoldani. Tudjuk, hogy a betegek kartonjai közül húzunk, így most csak ezekkel foglalkozunk. Legyen E_1 az az esemény, hogy az elsőnek kihúzott karton egy fiúé és E_2 az az esemény, hogy a második karton egy lányé! Ekkor

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) = \frac{40}{100} \cdot \frac{50}{99}.$$

($\mathbb{P}(E_2|E_1) = \frac{50}{99}$, hiszen E_1 feltétel mellett tudjuk, hogy a második húzásnál a még bent lévő 99 karton közül 50 tartozik lányhoz.)

(g) Az előzőhöz hasonlóan számolható: $\frac{40}{100} \cdot \frac{39}{99}$.

12. feladat 2 golyót $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel arany vagy fekete színűre festenek, majd berakják őket egy dobozba.

(a) Látjuk, hogy az arany színű festéket használták, így feltételezzük, hogy van arany golyó. Ezzel a feltevéssel élve mennyi a valószínűsége, hogy mindkét golyó arany színű?

(b) Kiveszek egy golyót a dobozból, ami arany. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik golyó is arany színű?

Megoldásvázlat A feltételes valószínűség (1) definíciója alapján számolhatók:
(a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{2}$.

13. feladat A Vásárhelyi Pál Kollégiumban csótányirtást végeztek, mely három turnusból állt. Az első irtásnál elpusztult a csótányok 60%-a, a másodiknál a még élő csótányok 40%-a, majd az utolsó irtásnál a még életben lévők 20%-a.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy csótány túlélte ezt az akciót?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy csótány pontosan a 3. irtásnál pusztult el?

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy egy csótány túléli az irtást, feltéve, hogy az első kör után még látták, hogy él?

Megoldásvázlat

(a) Az első irtást 40% éli túl, a másodikat ezeknek a 60%-a, a harmadikat a maradék 80%-a, így a valószínűség $0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,192$.

(b) Akkor pusztul el pontosan a 3. irtásnál, ha az első kettőt túléli, majd a harmadikban meghal. Ennek a valószínűsége: $0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,2 = 0,048$.

(c) Az első kör után 60% éli túl a másodikat és ezek 80%-a a harmadikat, így a valószínűség: $0,6 \cdot 0,8 = 0,48$.

14. feladat A tartók statikája tárgy vizsgája áll egy beugróból, aztán a sikeresen teljesítők mehetnek írásbelizni, majd akik ezen is sikeresen szerepelnek, mehetnek tovább szóbeli vizsgára. A beugrón a hallgatók 90%-a, az írásbelin 80%-a, szóbelin pedig a 70%-a veszi sikerrel az akadályokat.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató sikeresen teljesíti az egész vizsgát?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott hallgatónak az írásbelije lesz sikertelen, feltéve, hogy tudjuk, hogy sikertelen lett a vizsgája?

Megoldásvázlat

(a) $0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504$

(b) Legyen B az az esemény, hogy egy véletlenül kiválasztott hallgató megbukik a vizsgán és I az az esemény, hogy egy véletlenül kiválasztott hallgató az írásbelin bukik meg! Ekkor

$$\mathbb{P}(I|B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap I)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,9 \cdot 0,2}{1 - 0,504} \approx 0,363.$$

15. feladat A Drönkben $\frac{1}{3}$ valószínűséggel Jägert, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel Unicumot rendelünk. A pultosok jókedve miatt Jäger helyett Unicumot kapunk $\frac{1}{4}$ valószínűséggel, Unicum helyett pedig Jägert $\frac{1}{5}$ valószínűséggel. Mennyi a valószínűsége, hogy Unicumot kapunk?

Megoldásvázlat Legyen U és J az az esemény, hogy Unicumot, illetve Jägert rendelünk és A az az esemény, hogy Unicumot kapunk! Ekkor teljes valószínűség tételével számolva:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|U) \cdot \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(A|J) \cdot \mathbb{P}(J) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{37}{60}.$$

16. feladat A zsebemben három pénzérme van. Egy köztük olyan, mellyel 0,5 valószínűséggel, a két másikkal $0,6 - 0,6$ valószínűséggel dobok fejet. Találomra kiveszem az egyik pénzérmét és háromszor feldobom.

(a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás fej lesz?

(b) Feltéve, hogy mindhárom dobás fej lett, mi a valószínűsége, hogy a szabályos érmével dobtam?

Megoldásvázlat Legyen $A = \{\text{szabályos érmét vettem ki}\}$, $B = \{\text{cinkelt érmét vettem ki}\}$, $C = \{\text{mindhárom dobás fej}\}$! Ekkor $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(C|A) = 0,5^3 = \frac{1}{8}, \mathbb{P}(C|B) = 0,6^3 = \frac{27}{125}$.

(a) Teljes valószínűség tétele szerint $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|B) \cdot \mathbb{P}(B) \approx 0,19$.

(b) Bayes-tétellel $\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C|A)}{\mathbb{P}(C)} \approx 0,22$.

17. feladat Egy spam-szűrő program úgy működik, hogy a spamekben gyakran előforduló szavakat figyeli. Tegyük fel, hogy az e-mailek 80%-a spam. A spamek 10%-ában az "ingyen" szó előfordul, míg ugyanez a szó a rendes e-maileknek csupán 1%-ában olvasható. Egy most érkezett e-mailben az "ingyen" szó olvasható. Mi a valószínűsége, hogy az spam?

Megoldásvázlat Legyen $A = \{\text{az e-mail spam}\}$, $B = \{\text{szerepel az "ingyen" szó}\}$! Ekkor $\mathbb{P}(A) = 0,8$, $\mathbb{P}(B|A) = 0,1$, $\mathbb{P}(B|A^C) = 0,01$. Így Bayes-tétellel

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^C) \cdot \mathbb{P}(B|A^C)} = \frac{0,08}{0,08 + 0,002} \approx 0,98.$$

18. feladat Van egy cinkelt érmém, ami fejet mutat $0,6$ valószínűséggel.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy négyszer feldobva mind a négyszer fejet fog mutatni?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy négyszer feldobva először írást, aztán háromszor fejet fog mutatni?

Megoldásvázlat Használva, hogy a dobások függetlenek egymástól:

(a) $0,6^4$

(b) $0,4 \cdot 0,6^3$

19. feladat Egy érmét háromszor feldobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy legfeljebb egy fejet dobtunk és B azt, hogy fejet és írást is dobtunk. Függetlenek-e az A és B események?

Megoldásvázlat A lehetséges esetek összeszámolásával $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Vagyis $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ teljesül, így függetlenek.