Matematika A3 építőmérnököknek 9. gyakorlat
Diszkrét valószínűségi változók

Valószínűségi változók

A **valószínűségi változók** az eseménytéren értelmezett függvények. Egy valószínűségi változó **diszkrét**, ha csak véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel.

Ha X diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, melyek valószínűsége rendre $p_X(x_i)$, azaz $p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$, akkor $p_X(.)$ függvény az X változó **súlyfüggvénye**.

X és Y valószínűségi változók **függetlenek**, ha $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ események függetlenek minden A, $B \subseteq \mathbb{R}$ halmazra.

Diszkrét valószínűségi változók jellemzői

- **Várható érték**: $\mathbb{E}(X) = \sum x_i \cdot p(x_i)$, ahol X összes lehetséges x_i értékére összegzünk
- **Variancia** vagy **szórásnégyzet**: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$
- **Szórás**: $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Tulajdonságok:

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(cX) = c \cdot \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(g(X)) = \sum\limits_i g(x_i) \cdot p(x_i)$, $\mathrm{Var}(cX) = c^2 \mathrm{Var}(X)$
- Ha X és Y független: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

1. feladat Egy versenyen 5 lány és 5 fiú indul. Az X valószínűségi változó jelölje a legjobb női eredményt. Írjuk fel X eloszlását!

2. feladat Legyen az X valószínűségi változó súlyfüggvénye a $p(i) = \dfrac{i^2}{30}$, ahol $i = 1, 2, 3, 4$ értékeket vehet fel! Mennyi lesz az X várható értéke?

3. feladat Feldobunk egy szabályos dobókockát. Mennyi lesz a dobott szám várható értéke és szórása?

4. feladat Feldobunk két szabályos dobókockát. Legyen X valószínűségi változó értéke a dobott számok közül a nagyobb érték! Mennyi lesz az X várható értéke és szórása?

5. feladat Egy X valószínűségi változóról azt tudjuk, hogy $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$. Határozzuk meg a következő mennyiségeket!
(a) $\mathbb{E}\left[(2+X)^2\right]$ (b) $\mathbb{D}^2(4+3X)$

Nevezetes diszkrét eloszlások

Binomiális: Ha egy kísérletet n-szer végzünk el egymástól függetlenül, ahol a siker valószínűsége p és X jelöli a sikeres kísérletek számát, akkor X eloszlása binomiális n és p paraméterekkel. Jelölés: $X \sim \mathrm{BIN}(n,p)$ vagy $X \sim \mathrm{B}(n,p)$.

Poisson: Sok, kis valószínűségű, független kísérletből a sikeresek számát Poisson eloszlású valószínűségi változóval jellemezhetjük. Ha a sikeres kísérletek várható száma λ, akkor X valószínűségi változó eloszlása λ-paraméterű Poisson eloszlás. Jelölés: $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$.

Ha n elég nagy és p kicsi, akkor $\mathrm{BIN}(n,p)$ jól közelíthető $\mathrm{POI}(np)$ eloszlással.

Geometriai: Egy kísérletet végezzünk el végtelen sokszor úgy, hogy a kísérletek egymástól függetlenek. Ha X a kísérletek száma az első sikerig (a sikerest is beleszámítva), akkor X geometriai eloszlású p paraméterrel, ahol p egy kísérlet sikerességének valószínűsége. Jelölés: $X \sim \mathrm{GEO}(p)$.

X **eloszlása**	lehetséges értékek	$p_X(k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{BIN}(n,p)$	$k = 0, 1, \dots, n$	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{POI}(\lambda)$	$k = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$	λ	λ
$\mathrm{GEO}(p)$	$k = 1, 2, 3, \dots$	$(1-p)^{k-1} \cdot p$	$1/p$	$(1-p)/p^2$

6. feladat Egy szabadon választható tárgyból a ZH-n 10 igaz-hamis kérdésre kell válaszolni. A ZH sikeres, ha legalább 8 kérdésre jól válaszolunk. Mivel egyszer átolvastuk a kiadott diasort, ezért 0,6 annak a valószínűsége, hogy egy-egy kérdésre a többitől függetlenül jól válaszolok. Mennyi a valószínűsége, hogy sikeresen teljesítem a ZH-t?

7. feladat Egy szabadon választható tárgyból a ZH-n 5 feleletválasztós kérdésre kell válaszolni, ahol három választási lehetőségünk van. A ZH sikeres, ha legalább 4 kérdésre jól válaszolunk. Mivel nem készültünk a ZH-re, így minden feladatnál tippelünk. Mennyi a valószínűsége, hogy sikeresen teljesítem a ZH-t?

8. feladat Egy számegyenesen az origóból indulva $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel eggyel jobbra vagy balra lépünk egyet minden lépésben. 20 lépés megtétele után mennyi a valószínűsége, hogy

(a) a nullában állok? (b) az egyben állok? (c) a kettőben állok?

(d) a mínusz kettőben állok, feltéve, hogy az utolsó lépés előtt a mínusz háromban álltam?

9. feladat Egy gépsoron alkatrészeket gyártanak, de sajnos az alkatrészek 1%-a hibás. A legyártott alkatrészeket dobozokba teszik. Mindegyik dobozba 10 alkatrészt raknak. Egy elkészített dobozt rossznak nevezünk, ha legalább 2 hibás alkatrész van benne.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy rossz dobozt állítanak össze?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy 3 dobozból pontosan 1 doboz lesz rossz?

10. feladat Egy 400 oldalas könyvben 200 db sajtóhiba található. Mennyi a valószínűsége, hogy a 13. oldalon egynél több hiba lesz? Indokoljuk meg a használt modellt!

11. feladat Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 99% eséllyel legyen (legalább egy szem) mazsola?

12. feladat Egy futóversenyen a pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

13. feladat Egy dobozban 4 zöld és 4 fehér golyó található. Találomra kihúzunk 4 golyót. Ha ebből 2 zöld és 2 fehér, akkor megállok, különben visszateszem őket és húzok újra.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy sikeresen húzok?

(b) Várhatóan hány húzásra lesz szükségem a megálláshoz?

14. feladat Egy társasjátékban két kockával dobok egyszerre. Egy olyan mezőre kerültem, ahonnan csak akkor tudok továbblépni, ha a dobott számok között szerepel a hatos. Várhatóan hányadik dobásra tudok ellépni a mezőről?

15. feladat Egy dobókockával addig dobok, amíg ugyan azt a számot nem dobom kétszer egymás után. Várhatóan mennyiszer kell feldobnom a kockát?

16. feladat Albert villamossál jár az egyetemre a hét mind az öt munkanapján, viszont nincs jegye. Hazafelé minden nap gyalogol. A villamoson az esetek 20%-ban van ellenőr. Ilyenkor Albert az esetek 5%-ban meg tud lógni az ellenőr elől. Ha Albert nem tud meglógni, akkor az ellenőr megbünteti.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon megbüntetik?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy sikeres hete lesz, azaz egyik nap sem kap büntetést?

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 napból 2 napon kap büntetést?

(d) Mennyi a valószínűsége, hogy sikeres hete lesz, feltéve, hogy mind az 5 nap volt ellenőr a villamoson?

(e) Mennyi a valószínűsége, hogy az első büntetése csütörtökön lesz a héten?

(f) Várhatóan hányadik napon fogják megbüntetni először?