Matematika A3 építőmérnököknek 9. gyakorlat
Diszkrét valószínűségi változók

Valószínűségi változók

A **valószínűségi változók** az eseménytéren értelmezett függvények. Egy valószínűségi változó **diszkrét**, ha csak véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel.

Ha X diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots,$ melyek valószínűsége rendre $p_X(x_i)$, azaz $p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$, akkor $p_X(.)$ függvény az X változó **súlyfüggvénye**.

X és Y valószínűségi változók **függetlenek**, ha $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ események függetlenek minden A, $B \subseteq \mathbb{R}$ halmazra.

Diszkrét valószínűségi változók jellemzői

- **Várható érték**: $\mathbb{E}(X) = \sum x_i \cdot p(x_i)$, ahol X összes lehetséges x_i értékére összegzünk
- **Variancia** vagy **szórásnégyzet**: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$
- **Szórás**: $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Tulajdonságok:

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(cX) = c \cdot \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(g(X)) = \sum\limits_i g(x_i) \cdot p(x_i)$, $\mathrm{Var}(cX) = c^2 \mathrm{Var}(X)$
- Ha X és Y független: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

1. feladat Egy versenyen 5 lány és 5 fiú indul. Az X valószínűségi változó jelölje a legjobb női eredményt. Írjuk fel X eloszlását!

Megoldásvázlat X lehetséges értékei 1, 2, 3, 4, 5 és 6. Legyen $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$ az X súlyfüggvénye! Ekkor

$$p_X(1) = \frac{1}{2}, \qquad p_X(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9}, \qquad p_X(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8},$$
$$p_X(4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}, \quad p_X(5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}, \quad p_X(6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}.$$

2. feladat Legyen az X valószínűségi változó súlyfüggvénye a $p(i) = \dfrac{i^2}{30}$, ahol $i = 1, 2, 3, 4$ értékeket vehet fel! Mennyi lesz az X várható értéke?

Megoldásvázlat A várható érték definíciója alapján számolható:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} i \cdot \frac{i^2}{30} = \frac{1}{30} + \frac{8}{30} + \frac{27}{30} + \frac{64}{30} = \frac{10}{3}.$$

3. feladat Feldobunk egy szabályos dobókockát. Mennyi lesz a dobott szám várható értéke és szórása?

Megoldásvázlat Legyen X a dobott szám értéke! Ekkor a várható érték definíció alapján számolható:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

A szóráshoz szükségünk van X^2 várható értékére:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Ebből a szórás:

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2} = \sqrt{\frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{35}{12}}.$$

4. feladat Feldobunk két szabályos dobókockát. Legyen X valószínűségi változó értéke a dobott számok közül a nagyobb érték! Mennyi lesz az X várható értéke és szórása?

Megoldásvázlat Először írjuk fel X súlyfüggvényét:

$$p_X(1) = \frac{1}{36}, \quad p_X(2) = \frac{3}{36}, \quad p_X(3) = \frac{5}{36}, \quad p_X(4) = \frac{7}{36}, \quad p_X(5) = \frac{9}{36}, \quad p_X(6) = \frac{11}{36}.$$

Ebből a várható érték:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot p_X(k) = \frac{1+6+15+28+45+66}{36} = \frac{161}{36}.$$

A szóráshoz számoljuk ki az X^2 várható értékét:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot p_X(k) = \frac{1+12+45+112+225+396}{36} = \frac{791}{36}.$$

Ebből a szórás:

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2} = \sqrt{\frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2}.$$

5. feladat Egy X valószínűségi változóról azt tudjuk, hogy $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$. Határozzuk meg a következő mennyiségeket!
(a) $\mathbb{E}\left[(2+X)^2\right]$ (b) $\mathbb{D}^2(4+3X)$

Megoldásvázlat (a) 14 (b) 45

Nevezetes diszkrét eloszlások

Binomiális: Ha egy kísérletet n-szer végzünk el egymástól függetlenül, ahol a siker valószínűsége p és X jelöli a sikeres kísérletek számát, akkor X eloszlása binomiális n és p paraméterekkel. Jelölés: $X \sim \mathrm{BIN}(n,p)$ vagy $X \sim \mathrm{B}(n,p)$.

Poisson: Sok, kis valószínűségű, független kísérletből a sikeresek számát Poisson eloszlású valószínűségi változóval jellemezhetjük. Ha a sikeres kísérletek várható száma λ, akkor X valószínűségi változó eloszlása λ-paraméterű Poisson eloszlás. Jelölés: $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$.

Ha n elég nagy és p kicsi, akkor $\mathrm{BIN}(n,p)$ jól közelíthető $\mathrm{POI}(np)$ eloszlással.

Geometriai: Egy kísérletet végezzünk el végtelen sokszor úgy, hogy a kísérletek egymástól függetlenek. Ha X a kísérletek száma az első sikerig (a sikerest is beleszámítva), akkor X geometriai eloszlású p paraméterrel, ahol p egy kísérlet sikerességének valószínűsége. Jelölés: $X \sim \mathrm{GEO}(p)$.

X **eloszlása**	lehetséges értékek	$p_X(k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{BIN}(n,p)$	$k = 0, 1, \ldots, n$	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{POI}(\lambda)$	$k = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$	λ	λ
$\mathrm{GEO}(p)$	$k = 1, 2, 3, \ldots$	$(1-p)^{k-1} \cdot p$	$1/p$	$(1-p)/p^2$

6. feladat Egy szabadon választható tárgyból a ZH-n 10 igaz-hamis kérdésre kell válaszolni. A ZH sikeres, ha legalább 8 kérdésre jól válaszolunk. Mivel egyszer átolvastuk a kiadott diasort, ezért 0,6 annak a valószínűsége, hogy egy-egy kérdésre a többitől függetlenül jól válaszolok. Mennyi a valószínűsége, hogy sikeresen teljesítem a ZH-t?

Megoldásvázlat Legyen X a jó válaszaim száma! Minden kérdésre egymástól függetlenül 0,6 valószínűséggel válaszolok jól és összesen 10 kérdés van, így X eloszlása $\mathrm{BIN}(10; 0,6)$. Így a sikeres teljesítés valószínűsége:

$$\mathbb{P}(X \geq 8) = \sum_{k=8}^{10} p_X(k) = \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} \cdot 0,6^k \cdot 0,4^{10-k} = 0,6^{10} + 10 \cdot 0,6^9 \cdot 0,4 + 45 \cdot 0,6^8 \cdot 0,4^2.$$

7. feladat Egy szabadon választható tárgyból a ZH-n 5 feleletválasztós kérdésre kell válaszolni, ahol három választási lehetőségünk van. A ZH sikeres, ha legalább 4 kérdésre jól válaszolunk. Mivel nem készültünk a ZH-re, így minden feladatnál tippelünk. Mennyi a valószínűsége, hogy sikeresen teljesítem a ZH-t?

Megoldásvázlat Legyen X a jó válaszaim száma! Előzőhöz hasonlóan számolható, de most egy jó válasz valószínűsége $\frac{1}{3}$ és 5 kérdés van, így X eloszlása $\mathrm{BIN}\left(5, \frac{1}{3}\right)$ és a sikeres teljesítés valószínűsége:

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{5} p_X(k) = \sum_{k=4}^{5} \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right).$$

8. feladat Egy számegyenesen az origóból indulva $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel eggyel jobbra vagy balra lépünk egyet minden lépésben. 20 lépés megtétele után mennyi a valószínűsége, hogy

(a) a nullában állok? (b) az egyben állok? (c) a kettőben állok?

(d) a mínusz kettőben állok, feltéve, hogy az utolsó lépés előtt a mínusz háromban álltam?

Megoldásvázlat Legyen X az első 20 lépés alatt a jobbra lépések száma! Ekkor $X \sim \mathrm{BIN}\left(20, \frac{1}{2}\right)$.

(a) Pontosan akkor állunk a nullában, ha tízszer léptünk jobbra (és tízszer balra). Ennek a valószínűsége $\binom{20}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$.

(b) Az egyben (illetve bármilyen páratlan helyen) nem állhatunk páros sok lépés után.

(c) Pontosan akkor állunk a kettőben, ha 11-szer léptünk jobbra (és 9-szer balra). Ennek a valószínűsége $\binom{20}{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$.

(d) Ha tudjuk, hogy 19 lépés után a mínusz háromban állunk, akkor pontosan akkor állunk a mínusz kettőben 20 lépés után, ha a 20. lépés jobbra megy, aminek $\frac{1}{2}$ a valószínűsége.

9. feladat Egy gépsoron alkatrészeket gyártanak, de sajnos az alkatrészek 1%-a hibás. A legyártott alkatrészeket dobozokba teszik. Mindegyik dobozba 10 alkatrészt raknak. Egy elkészített dobozt rossznak nevezünk, ha legalább 2 hibás alkatrész van benne.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy rossz dobozt állítanak össze?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy 3 dobozból pontosan 1 doboz lesz rossz?

Megoldásvázlat

(a) Legyen X egy dobozban a hibás alkatrészek száma! Ekkor $X \sim \mathrm{BIN}\,(10; 0,01)$. Így a rossz doboz összeállításának a valószínűsége:

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{10}{k} 0,01^k \cdot 0,99^{10-k} = 1 - 0,99^{10} - 10 \cdot 0,01 \cdot 0,99^9 \approx 0,004.$$

(b) Legyen p az előbb kiszámolt valószínűség! Ekkor 3 dobozból a rosszak számának az eloszlása $\mathrm{BIN}(3, p)$. Így annak a valószínűsége, hogy pontosan 1 rossz van közöttük: $3 \cdot p \cdot (1-p)^2$.

10. feladat Egy 400 oldalas könyvben 200 db sajtóhiba található. Mennyi a valószínűsége, hogy a 13. oldalon egynél több hiba lesz? Indokoljuk meg a használt modellt!

Megoldásvázlat Minden hiba $\frac{1}{400}$ valószínűséggel esik a 13. oldalra, így a 13. oldalon a hibák száma $\mathrm{BIN}\left(200, \frac{1}{400}\right)$. Legyen X a 13. oldalon lévő hibák száma! Annak a valószínűsége, hogy több, mint 1 hiba van a 13. oldalon:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 1) &= 1 - \sum_{k=0}^{1} p_X(k) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{200}{k} \cdot \left(\frac{1}{400}\right)^k \cdot \left(\frac{399}{400}\right)^{200-k} \\ &= 1 - \left(\frac{399}{400}\right)^{200} - 200 \cdot \frac{1}{400} \cdot \left(\frac{399}{400}\right)^{199} \approx 0,0908.\end{aligned}$$

Másképp: Sok hiba van, amik egymástól függetlenül helyezkednek el az oldalakon és egy adott hiba kis valószínűséggel van épp a 13. oldalon. Ezért az egy oldalon lévő hibák száma jól közelíthető Poisson eloszlással. Mivel egy oldalon átlagosan $\frac{1}{2}$ hiba van, így egy adott oldalon a hibák számának eloszlása közelítőleg $\mathrm{POI}\left(\frac{1}{2}\right)$. Ekkor

$$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} p_X(k) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \mathrm{e}^{-1/2} \frac{\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0,0902.$$

Megjegyzés: A második megoldásban igazából azt a tételt használtuk, hogy ha n nagy és p kicsi, akkor $\mathrm{BIN}(n, p)$ jól közelíthető $\mathrm{POI}(n \cdot p)$ eloszlással. Most $n = 200$, $p = \frac{1}{400}$, így $\mathrm{BIN}\left(200, \frac{1}{400}\right)$ eloszlást $\mathrm{POI}\left(\frac{1}{2}\right)$ eloszlással tudtuk közelíteni.

11. feladat Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 99% eséllyel legyen (legalább egy szem) mazsola?

Megoldásvázlat Legyen X egy sütiben a mazsolák száma! Ekkor X eloszlása jól közelíthető Poisson eloszlással valamilyen λ paraméterrel. Ekkor $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$. Nekünk olyan λ kell, amire ez a valószínűség legalább 0,99, azaz

$$1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \geq 0,99.$$

Ezt átrendezve $\lambda \geq -\ln 0,01 \approx 4,61$. Mivel $\mathrm{POI}(\lambda)$ várható értéke λ, így átlagosan legalább $4,61$ mazsola kell a sütibe.

12. feladat Egy futóversenyen a pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

Megoldásvázlat Egy versenyzőben a kullancsok száma $\mathrm{POI}(\lambda)$ eloszlású ismeretlen λ-ra. Ekkor, ha N az indulók száma, akkor a feltételekből $N \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = 300$ és $N \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = 75$. Ebből $\lambda = 0.5$ és $N \approx 989$.

13. feladat Egy dobozban 4 zöld és 4 fehér golyó található. Találomra kihúzunk 4 golyót. Ha ebből 2 zöld és 2 fehér, akkor megállok, különben visszateszem őket és húzok újra.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy sikeresen húzok?

(b) Várhatóan hány húzásra lesz szükségem a megálláshoz?

Megoldásvázlat

(a) $\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{36}{70} = \frac{18}{35}$

(b) A megállásig szükséges húzások számának az eloszlása $\mathrm{GEO}\left(\frac{18}{35}\right)$, aminek a várható értéke $\frac{35}{18}$.

14. feladat Egy társasjátékban két kockával dobok egyszerre. Egy olyan mezőre kerültem, ahonnan csak akkor tudok továbblépni, ha a dobott számok között szerepel a hatos. Várhatóan hányadik dobásra tudok ellépni a mezőről?

Megoldásvázlat Minden próbálkozásnál $\frac{11}{36}$ valószínűséggel járok sikerrel, így a próbálkozások számának az eloszlása $\mathrm{GEO}\left(\frac{11}{36}\right)$. Mivel egy geometriai eloszlás várható értéke a paraméter reciproka, így a szükséges dobások számának várható értéke $\frac{36}{11}$.

15. feladat Egy dobókockával addig dobok, amíg ugyan azt a számot nem dobom kétszer egymás után. Várhatóan mennyiszer kell feldobnom a kockát?

Megoldásvázlat A második dobástól kezdődően mindig $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dobom ugyanazt, mint előtte. Így, ha X jelöli azt, hogy a második dobástól kezdődően hanyadikra sikerült ugyanazt dobnom, mint előtte, akkor $X \sim \mathrm{GEO}\left(\frac{1}{6}\right)$. Ennek várható értéke 6, így az első dobást is számolva várhatóan 7-szer kell feldobnom a kockát.

16. feladat Albert villamossál jár az egyetemre a hét mind az öt munkanapján, viszont nincs jegye. Hazafelé minden nap gyalogol. A villamoson az esetek 20%-ban van ellenőr. Ilyenkor Albert az esetek 5%-ban meg tud lógni az ellenőr elől. Ha Albert nem tud meglógni, akkor az ellenőr megbünteti.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon megbüntetik?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy sikeres hete lesz, azaz egyik nap sem kap büntetést?

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 napból 2 napon kap büntetést?

(d) Mennyi a valószínűsége, hogy sikeres hete lesz, feltéve, hogy mind az 5 nap volt ellenőr a villamoson?

(e) Mennyi a valószínűsége, hogy az első büntetése csütörtökön lesz a héten?

(f) Várhatóan hányadik napon fogják megbüntetni először?

Megoldásvázlat

(a) Akkor büntetik meg, ha jön az ellenőr, de nem tud meglógni: $0,2 \cdot 0,95 = 0,19$.

(b) Egy nap $0,81$ valószínűséggel nem büntetik meg, így annak a valószínűsége, hogy 5 nap alatt egyszer sem büntetik meg: $0,81^5$.

(c) Ha X az 5 nap alatt azon napok száma, amikor megbüntetik, akkor $X \sim \mathrm{BIN}(5; 0,19)$, így

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,19^2 \cdot 0,81^3.$$

(d) Ha van ellenőr, akkor csak $0,05$ valószínűséggel nem büntetik meg, így annak a valószínűsége, hogy 5 nap alatt egyszer sem: $0,05^5$.

(e) Az első büntetés napja geometriai eloszlású $0,19$ paraméterrel, így a kérdezett valószínűség: $0,81^3 \cdot 0,19$.

(f) Geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értéke a paraméter reciproka, vagyis várhatóan $1/0,19 \approx 5,26$ nap után büntetik meg először.