

## Matematika A3 építőmérnököknek 11. gyakorlat

### Normális eloszlás

$X$  valószínűségi változó normális eloszlású  $m, s^2$  paraméterekkel (jel:  $X \sim \mathcal{N}(m, s^2)$ ), ha sűrűségfüggvénye  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$ . Ekkor várható értéke  $\mathbb{E}(X) = m$ , szórásnégyzete  $\mathbb{D}^2(X) = s^2$ .

**Standard normális** eloszlásról akkor beszélünk, ha  $m = 0, s = 1$ . Ekkor a sűrűség- és eloszlásfüggvénye:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Erre nincs elemi képlet, viszont értékei táblázatból kiolvashatók pozitív  $x$ -ekre. Negatív  $x$  esetén a  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$  azonosságot használhatjuk.

Ha  $X \sim \mathcal{N}(m, s^2)$ , akkor az ő **standardizáltja**  $Z := \frac{X-m}{s} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**1. feladat** Legyen  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ! Számítsuk ki az alábbi értékeket!

- (a)  $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$
- (b)  $\mathbb{P}(-2 < X < 2)$
- (c)  $\mathbb{P}(-1 < X < 2, 5)$

**2. feladat** Legyen  $X \sim \mathcal{N}(10, 36)$ ! Számítsuk ki az alábbi értékeket!

- (a)  $\mathbb{P}(X > 5)$
- (b)  $\mathbb{P}(4 < X < 16)$

**3. feladat** Legyen  $X \sim \mathcal{N}(5, \sigma^2)$ ! Mennyi lesz  $\mathbb{D}(X)$ , ha tudjuk, hogy  $\mathbb{P}(X > 9) = 0, 2$ ?

**4. feladat** A Műegyetemen a hallgatók testmagasságát centiméterben vizsgálva elmondható, hogy normális eloszlást követ,  $\mu = 180$  várható értékkel és  $\sigma = 13$  szórással.

- (a) A hallgatók hány százaléka magasabb 2 méternél?
- (b) A 2 méternél magasabb hallgatók mekkora része magasabb 2,1 méternél is?

**5. feladat** Egy üzletben a narancsok súlya normális eloszlású 20 dkg várható értékkel és 4 dkg szórással.

- (a) A narancsok mekkora része nehezebb, mint 10 dkg?
- (b) Az átlagosnál nehezebb narancsok mekkora része nehezebb 24 dkg-nál is?

**6. feladat** Egy újszülött testsúlya normális eloszlású 3500 g várható értékkel és 500 g szórással.

- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy újszülött testsúlya meghaladja a 3200 g-ot?
- (b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy újszülött testsúlya meghaladja a 3200 g-ot, ha tudjuk, hogy 1500 g-nál biztosan nehezebb?

**7. feladat** Egy normális eloszlású  $X$  valószínűségi változó várható értéke 10, szórása 4.

- (a) Mennyi az  $a$  értéke, ha tudjuk, hogy  $\mathbb{P}(X > a) = 0, 1$ ?
- (b) Mennyi az értéke az alábbi kifejezésnek:  $\mathbb{P}(|X - 10| < 4)$ ?

**8. feladat** Egy részvény éves hozama normális eloszlást követ 10% várható értékkel és 20% szórással.

- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a részvény ára egy év múlva kisebb lesz, mint most?
- (b) Mennyi a valószínűsége, hogy az éves hozam 20% felett lesz?
- (c) Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 10 év közül pontosan négyszer lesz az éves hozam 20% felett?

**9. feladat** Egy új adózási törvényt úgy szerkesztenek meg, hogy az kedvezzen a "középosztálybeli" családoknak, vagyis azoknak, amelyeknek a jövedelme \$20000 and \$30000 között van. Ha a családok jövedelme normális eloszlást követ \$25000 várható értékkel és \$10000<sup>2</sup> varianciával, akkor a családok hány százalékának kedvez a törvény?

**10. feladat** Az A3-at tanuló diákok végső százalékpontos eredményei normális eloszlásúnak tekinthetők 65 várható értékkel és 15 szórással.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott diák középezt (3-ast) kap (azaz a pontja 60 és 70 pont közé esik)?
- (b) Az átment diákok (azok, akik legalább 50 pontot értek el) hány százaléka kap középezt?

**11. feladat** Dohányosok nikotinszintje normális eloszlású valószínűségi változóval modellezhető, melynek várható értéke 315, szórásnégyzete 17161.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje meghaladja a 450-et?
- (b) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje 150 és 400 közé esik?
- (c) Mi az a nikotinszint, amely fölöttivel a dohányosok 5%-a bír?
- (d) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje 400-nál magasabb, feltéve, hogy az az átlagnál magasabb?