Matematika A3 építőmérnököknek 11. gyakorlat
Normális eloszlás

X valószínűségi változó normális eloszlású m, s^2 paraméterekkel (jel: $X \sim \mathcal{N}(m, s^2)$), ha sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot s}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$. Ekkor várható értéke $\mathbb{E}(X) = m$, szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(X) = s^2$.

Standard normális eloszlásról akkor beszélünk, ha $m = 0$, $s = 1$. Ekkor a sűrűség- és eloszlásfüggvénye:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Erre nincs elemi képlet, viszont értékei táblázatból kiolvashatók pozitív x-ekre. Negatív x esetén a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ azonosságot használhatjuk.

Ha $X \sim \mathcal{N}(m, s^2)$, akkor az ő **standardizáltja** $Z := \frac{X-m}{s} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. feladat Legyen $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$! Számítsuk ki az alábbi értékeket!

(a) $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$

(b) $\mathbb{P}(-2 < X < 2)$

(c) $\mathbb{P}(-1 < X < 2,5)$

Megoldásvázlat Azt használjuk, hogy folytonos valószínűségi változóra

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a),$$

ahol $F(x)$ az X eloszlásfüggvénye. Most $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, így az eloszlásfüggvénye a fenti $\Phi(x)$ függvény, aminek értékeit pozitív x esetén a táblázatból tudjuk kiolvasni, negatív x esetén pedig a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ azonosságot használjuk.

(a) $\mathbb{P}(-1 < X < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826$

(b) $\mathbb{P}(-2 < X < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \approx 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544$

(c) $\mathbb{P}(-1 < X < 2,5) = \Phi(2,5) - \Phi(-1) = \Phi(2,5) + \Phi(1) - 1 \approx 0,9938 + 0,8413 - 1 = 0,8351$

2. feladat Legyen $X \sim \mathcal{N}(10, 36)$! Számítsuk ki az alábbi értékeket!

(a) $\mathbb{P}(X > 5)$

(b) $\mathbb{P}(4 < X < 16)$

Megoldásvázlat Az előzőhöz hasonlóan számolható, de most először standardizálunk. Legyen $Z := \frac{X-10}{6}$ az X standardizáltja. Ekkor $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, így az eloszlásfüggvénye $\Phi(x)$.

(a) $\mathbb{P}(X > 5) = \mathbb{P}\left(\frac{X-10}{6} > \frac{5-10}{6}\right) = \mathbb{P}(Z > -\frac{5}{6}) = 1 - \Phi\left(-\frac{5}{6}\right) = \Phi\left(\frac{5}{6}\right) \approx 0,7967$

(b) $\mathbb{P}(4 < X < 16) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1) \approx 0,6826$

3. feladat Legyen $X \sim \mathcal{N}(5, \sigma^2)$! Mennyi lesz $\mathbb{D}(X)$, ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X > 9) = 0,2$?

Megoldásvázlat Legyen Z az X standardizáltja! Ekkor

$$\mathbb{P}(X > 9) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{4}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right).$$

Tehát $\Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) = 0,8$, vagyis a táblázatból (amit most "visszafelé" használunk, azaz a táblázat belsejében keressük meg a $0,8$-at és a táblázat széléről leolvassuk a hozzátartozó értéket): $\frac{4}{\sigma} \approx 0,84$. Vagyis $\mathbb{D}(X) = \sigma \approx \frac{4}{0,84} = 4,76$.

4. feladat A Műegyetemen a hallgatók testmagasságát centiméterben vizsgálva elmondható, hogy normális eloszlást követ, $\mu = 180$ várható értékkel és $\sigma = 13$ szórással.

(a) A hallgatók hány százaléka magasabb 2 méternél?

(b) A 2 méternél magasabb hallgatók mekkora része magasabb 2,1 méternél is?

Megoldásvázlat Legyen X egy véletlenül választott hallgató magassága centiméterben és Z a standardizáltja! Ekkor $X \sim \mathcal{N}(180, 13^2)$.

(a) $\mathbb{P}(X > 200) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{20}{13}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{20}{13}\right) \approx 1 - 0,9382 = 0,0618$

(b) $\mathbb{P}(X > 210 \,|\, X > 200) = \frac{\mathbb{P}(X>210)}{\mathbb{P}(X>200)} \approx \frac{1-\Phi\left(\frac{30}{13}\right)}{0{,}0618} \approx 0,168$

5. feladat Egy üzletben a narancsok súlya normális eloszlású 20 dkg várható értékkel és 4 dkg szórással.

(a) A narancsok mekkora része nehezebb, mint 10 dkg?

(b) Az átlagosnál nehezebb narancsok mekkora része nehezebb 24 dkg-nál is?

Megoldásvázlat Legyen X egy véletlenül választott narancs súlya dekagrammban és Z a standardizáltja! Ekkor $X \sim \mathcal{N}(20, 4^2)$.

(a) $\mathbb{P}(X > 10) = \mathbb{P}\left(Z > -\frac{10}{4}\right) = \Phi(2,5) \approx 0,9938$

(b) $\mathbb{P}(X > 24 \,|\, X > 20) = \frac{\mathbb{P}(X>24)}{\mathbb{P}(X>20)} \approx \frac{0{,}1587}{0{,}5} = 0,3174$

Megjegyzés: A (b) feladatban a nevezőt ki tudjuk számolni a szokásos módon, a táblázat segítségével. De ennél egyszerűbben is lehet, hiszen minden normális eloszlású változó "szimmetrikus", azaz $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz nagyobb az átlagánál.

6. feladat Egy újszülött testsúlya normális eloszlású 3500 g várható értékkel és 500 g szórással.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy újszülött testsúlya meghaladja a 3200 g-ot?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy újszülött testsúlya meghaladja a 3200 g-ot, ha tudjuk, hogy 1500 g-nál biztosan nehezebb?

Megoldásvázlat Legyen a következő újszülött testsúlya X és Z a standardizáltja. Ekkor $X \sim \mathcal{N}(3500, 500^2)$.

(a) $\mathbb{P}(X > 3200) = \mathbb{P}\left(Z > -\frac{3}{5}\right) = \Phi\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0.7257$

(b) $\mathbb{P}(X > 3200 \,|\, X > 1500) = \frac{\mathbb{P}(X>3200)}{\mathbb{P}(X>1500)} = \frac{\Phi\left(\frac{3}{5}\right)}{\Phi(4)} \approx 0.7257$

7. feladat Egy normális eloszlású X valószínűségi változó várható értéke 10, szórása 4.

(a) Mennyi az a értéke, ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X > a) = 0,1$?

(b) Mennyi az értéke az alábbi kifejezésnek: $\mathbb{P}(|X - 10| < 4)$?

Megoldásvázlat Legyen Z az X változó standardizáltja!

(a) $\mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{a-10}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a-10}{4}\right)$

Tehát $\Phi\left(\frac{a-10}{4}\right) = 0,9$, vagyis a táblázat alapján $\frac{a-10}{4} \approx 1,28$, amiből $a \approx 15,12$.

(b) $\mathbb{P}(|X - 10| < 4) = \mathbb{P}(6 < X < 14) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1) \approx 0,6826$

8. feladat Egy részvény éves hozama normális eloszlást követ 10% várható értékkel és 20% szórással.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a részvény ára egy év múlva kisebb lesz, mint most?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy az éves hozam 20% felett lesz?

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 10 év közül pontosan négyszer lesz az éves hozam 20% felett?

Megoldásvázlat Legyen X a részvény éves hozama és Z a standardizáltja! Ekkor $X \sim \mathcal{N}(10, 20^2)$.

(a) $\mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}\left(Z < -\frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,3085$

(b) $\mathbb{P}(X > 20) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,3085$

(c) Legyen Y a következő 10 év közül azon évek száma, amelyekben a hozam 20% felett van! Ekkor $Y \sim \mathrm{BIN}(10; 0,3085)$. Így a kérdezett valószínűség:

$$\binom{10}{4} \cdot 0,3085^4 \cdot 0,6915^6.$$

9. feladat Egy új adózási törvényt úgy szerkesztenek meg, hogy az kedvezzen a "középosztálybeli" családoknak, vagyis azoknak, amelyeknek a jövedelme \$20000 and \$30000 között van. Ha a családok jövedelme normális eloszlást követ \$25000 várható értékkel és $\$10000^2$ varianciával, akkor a családok hány százalékának kedvez a törvény?

Megoldásvázlat Legyen X egy család jövedelme \$1000-ban és Z a standardizáltja. Ekkor $X \sim \mathcal{N}(25, 10^2)$, így

$$\mathbb{P}(20 < X < 30) = \mathbb{P}(-0,5 < Z < 0,5) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \approx 0,383.$$

10. feladat Az A3-at tanuló diákok végső százalékpontos eredményei normális eloszlásúnak tekinthetők 65 várható értékkel és 15 szórással.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott diák közepest (3-ast) kap (azaz a pontja 60 és 70 pont közé esik)?

(b) Az átment diákok (azok, akik legalább 50 pontot értek el) hány százaléka kap közepest?

Megoldásvázlat Legyen X egy véletlenszerűen választott diák százalékpontos eredménye! Ekkor $X \sim \mathcal{N}(65, 15^2)$.

(a) $\mathbb{P}(60 < X < 70) = 2\Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1 \approx 0,2586$

(b) $\mathbb{P}(60 < X < 70 \,|\, X > 50) = \frac{2\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-1}{\Phi(1)} \approx 0,31$

11. feladat Dohányosok nikotinszintje normális eloszlású valószínűségi változóval modellezhető, melynek várható értéke 315, szórásnégyzete 17161.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje meghaladja a 450-et?

(b) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje 150 és 400 közé esik?

(c) Mi az a nikotinszint, amely fölöttivel a dohányosok 5%-a bír?

(d) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje 400-nál magasabb, feltéve, hogy az az átlagnál magasabb?

Megoldásvázlat Legyen X egy véletlenszerűen választott dohányos nikotinszintje! Ekkor a feladat alapján $X \sim \mathcal{N}(315, 131^2)$. Így

(a) $\mathbb{P}(X > 450) = 1 - \Phi\left(\frac{135}{131}\right) \approx 0,1515$

(b) $\mathbb{P}(150 < X < 400) = \Phi\left(\frac{85}{131}\right) + \Phi\left(\frac{165}{131}\right) - 1 \approx 0,6384$

(c) Kell a, amire $\mathbb{P}(X > a) = 0,05$, azaz $\Phi\left(\frac{a-315}{131}\right) = 0,95$, amiből $a \approx 531,2$.

(d) $\mathbb{P}(X > 400 \,|\, X > 315) = \frac{1-\Phi\left(\frac{85}{131}\right)}{1/2} \approx 0,5156$