Matematika A3 építőmérnököknek 12. gyakorlat
Centrális határeloszlás tétel

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}(X_i) = m$, $\mathbb{D}(X_i) = s$ minden $i = 1, 2, \ldots$ esetén! Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ekkor minden $a \in \mathbb{R}$ konstansra

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \cdot m}{s \cdot \sqrt{n}} \le a\right) = \Phi(a).$$

Megjegyzés: A tétel mondanivalója, hogy S_n standardizáltjának, azaz $\frac{S_n - n\cdot m}{s\cdot\sqrt{n}}$-nek az eloszlása nagy n esetén jól közelíthető $\mathcal{N}(0,1)$ standard normális eloszlással. Azaz S_n eloszlása nagy n esetén közelítőleg $\mathcal{N}(n\cdot m, s^2\cdot n)$. Így S_n-re vonatkozó valószínűségi kérdéseket meg tudunk oldani a normális eloszlásnál tanultak segítségével.

A centrális határeloszlás tételnek egy nevezetes speciális esete, amikor X_i olyan változó, ami p valószínűséggel 1, $1-p$ valószínűséggel 0 (ezt hívják p paraméterű Bernoulli eloszlásnak). Ekkor $S_n \sim \mathrm{BIN}(n,p)$, így $m = p$, $s = \sqrt{p(1-p)}$. Ezt nevezik **de Moivre–Laplace-tételnek**.

1. feladat Mennyi a valószínűsége, hogy 6000 kockadobás során előforduló hatosok száma 970 és 1050 közé fog esni?

2. feladat Egy gyár adott típusú termékei egymástól függetlenül elfogadható minőségűek 0,95 valószínűséggel. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy a következő 150 termékből legfeljebb 10 nem lesz elfogadható!

3. feladat Kétféle érménk van. Az egyik igazságos, ami 50%-os eséllyel mutat fejet is és írást is, a másik viszont cinkelt, és 55%-os eséllyel mutat fejet. Megtaláljuk az egyik érménket, de nem tudjuk, hogy igazságos-e vagy sem. Ennek eldöntésére az alábbi tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, majd ha legalább 525 fejet mutat, akkor azt mondjuk, hogy ez a cinkelt érme. Ellenkező esetben igazságosnak nyilvánítjuk az érmét.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved, feltéve, hogy igazságos volt az érme?

(b) Mennyi a valószínűség, ha hamis?

4. feladat Határozzuk meg azt a legkisebb k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 400 érmedobás során a fejek száma 195 és k közé esik, az legalább 0,5.

5. feladat Hányszor kell érmével dobnunk ahhoz, hogy 0,95-nél nagyobb valószínűséggel a fej eredmények száma a dobások számának 47%-a és 53%-a közé essen?

6. feladat Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 db független azonos eloszlású valószínűségi változó összege a [0, 30] intervallumba esik, ha egy ilyen valószínűségi változó eloszlása a [0, 1] intervallumon

(a) egyenletes,

(b) $f(x) = 2x$ sűrűségfüggvény szerint alakul?

7. feladat Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 10 000 kockadobás összege 34 800 és 35 200 közé esik!

8. feladat Egy kockát folyamatosan feldobunk addig, amíg a dobások összege meg nem haladja a 300-at. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy legalább 80 dobásra van ehhez szükségünk!

9. feladat Adott 100 égő, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású valószínűségi változó, 5 óra várható értékkel.

(a) Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azokat, amint kiégnek! Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk!

(b) Tegyük fel, hogy az égők kicserélésének ideje egyenletes eloszlást követ 0 és 0,5 óra között, továbbá az egyszerűbb számítás érdekében tegyük fel, hogy az utolsó kiégett égőt is "kicseréljük"! Mennyi a valószínűsége, hogy így még 550 óra múlva is lesz működő égőnk?

10. feladat Egy raktárban 101 láda van, melyek súlyai egymástól függetlenül 20 és 40 kg közti egyenletes eloszlás szerint alakulnak. Egy 3t teherbírású teherautó érkezik, melyre elkezdik felpakolni a ládákat. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy mind a 101 láda felrakható a teherautóra!

11. feladat Egy bizonyos népesség testsúlyának átlaga 70 kg, szórása 10 kg. Egy hajó teherbírása 7250 kg. Mennyi a valószínűsége jó közelítéssel, hogy 100 emberrel biztonságosan el tud indulni a hajó?

12. feladat Egy téglagyárban a téglák 6,3%-a selejtes. Ha a napi termelés mennyisége 2.000 db, mennyi a közelítő valószínűsége annak, hogy köztük 135-nél kevesebb lesz a selejt?