Fourier-transzformáció („Analízis 2. informatikusoknak”, BMETE90AX22 tárgyhoz)

Tasnádi Tamás

2015. június 21.

1. Bevezetés

A Fourier-sorok elméletében láttuk, hogyan bonthatunk fel egy 2π szerint periodikus függvényt trigonometrikus függvények diszkrét (megszámlálható) összegére. Itt a felhasznált trigonometrikus függvények körfrekvenciái pozitív egészek voltak. Most azt mutatjuk meg, hogyan bonthatunk fel egy tetszőleges (tipikusan nem periodikus) függvényt kontinuum számosságú trigonometrikus függvény folytonos összegére (integráljára). Ebben a felbontásban minden valós körfrekvencia szerepel.

A Fourier-transzformációnak számos alkalmazása van a jelfeldolgozásban, akusztikában, optikában, képfeldolgozásban, de segítséget nyújt közönséges és parciális differenciálegyenletek megoldásánál is.

A Fourier-transzformációt több különböző függvénytéren is lehetséges definiálni, és így, bár hasonló módon definiált, mégis eltérő tulajdonságú transzformációkhoz jutunk. A precíz matematikai leírásnál általában a Lebesgue-integrálra épül a transzformáció. Mi most gyakorlati szempontból tárgyaljuk a Fourier-transzformációt, impróprius Riemann-integrállal definiáljuk, és kisebb hangsúlyt fektetünk a transzformáció értelmezési tartományának és képterének pontos definiálására.

Az irodalomban nagyon sok, a Fourier-transzformációhoz többé-kevésbé hasonló integráltranszformációval találkozhatunk (például Laplace-transzformáció, Z-transzformáció, Wavelet-transzformáció …). Reméljük, hogy a Fourier-transzformáció megismerése szükség esetén megkönnyíti a többi integráltranszformáció megértését is.

2. A Fourier-integrál

Először a Fourier-sorok elméletét általánosítjuk 2π-szerint periodikus függvényekről $2L$ periódusú függvényekre, majd formálisan végrehajtjuk az $L \to \infty$ határátmenetet, és így jutunk a Fourier-integrál formulához.

Idézzük fel, hogy a $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ függvényrendszer teljes ortogonális rendszert alkot a $[0, 2\pi]$ intervallumon folytonos függvények $C[-\pi, \pi]$ terén a $\langle g, h\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)\,\mathrm{d}x$ skaláris szorzásra nézve, és ebben a rendszerben kifejtve egy tetszőleges f függvényt, mely 2π szerint periodikus és egy perióduson

Riemann-integrálható, megkapjuk a függvény Φ Fourier-sorát:

$$f \rightsquigarrow \Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big),$$

ahol az együtthatókat az

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\,\mathrm{d}t, \qquad n = 0, 1, 2 \dots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\,\mathrm{d}t, \qquad n = 1, 2, 3 \dots$$

integrálok adják meg.

Ehhez teljesen hasonlóan megmutatható, hogy tetszőleges $L > 0$ esetén az $\left\{1, \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right), \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ függvények teljes ortogonális rendszert alkotnak a $C[-L, L]$ függvénytéren, és egy $2L$ szerint periodikus, egy periódusra integrálható f függvényt kifejtve a

$$f \rightsquigarrow \Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)\right), \tag{1}$$

függvénysor adódik, ahol

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{t=-L}^{L} f(t) \cos\left(\frac{\pi}{L}nt\right) \mathrm{d}t, \qquad n = 0, 1, 2 \dots \tag{2a}$$
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{t=-L}^{L} f(t) \sin\left(\frac{\pi}{L}nt\right) \mathrm{d}t, \qquad n = 1, 2, 3 \dots \tag{2b}$$

Látható, hogy ha $L \to \infty$, akkor az (1) kifejtésben szereplő $\omega_n = \frac{\pi n}{L}$ körfrekvenciák egyre sűrűsödnek, $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L}$ távolságuk nullához tart.

Most legyen f tetszőleges intervallumon Riemann-integrálható, $\mathbb{R}$-en abszolút integrálható függvény (azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$), melyről feltesszük még, hogy tetszőleges $L > 0$-ra a $[-L, L]$ intervallumon $f = \Phi$. Az (1) sorfejtésbe beírva a (2) együtthatókat, majd felhasználva a $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$ azonosságot, az

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{t=-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\pi}{L}}_{\Delta\omega} \int_{t=-L}^{L} f(t) \cos\Big(\underbrace{\frac{n\pi}{L}}_{\omega_n}(t - x)\Big)\,\mathrm{d}t$$

kifejezés adódik. Az $L \to \infty$ esetén az első tag nullához tart. A második tag az

$$\omega \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{t=-L}^{L} f(t) \cos\big(\omega(t - x)\big)\,\mathrm{d}t$$

függvény (improprius) Riemann-integráljának az $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ osztópontú közelítő összege. Az $L \to \infty$ határesetben a közelítő összeget (formálisan) az integrállal helyettesítve az

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=0}^{\infty} \left(\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \cos\big(\omega(t - x)\big)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\omega \tag{3}$$

formula adódik.

Innen két úton is érdemes továbbhaladni. Egyrészt, újra alkalmazva (fordított irányban) a $\cos\big(\omega(t-x)\big) = \cos(\omega t)\cos(\omega x) + \sin(\omega t)\sin(\omega x)$ trigonometrikus összefüggést,

$$f(x) = \int_{\omega=0}^{\infty} \big(a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \sin(\omega x)\big)\,\mathrm{d}\omega$$

adódik, ahol

$$a_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t, \qquad b_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Ez jól láthatóan az (1) és (2) formulák „folytonos” megfelelője.

Másrészt, vegyük észre, hogy $\cos\big(\omega(t-x)\big)$ páros, $\sin\big(\omega(t-x)\big)$ pedig páratlan függvénye ω-nak, tehát

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\left(\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\cos\big(\omega(t-x)\big)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\omega, \tag{4a}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\left(\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\sin\big(\omega(t-x)\big)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\omega. \tag{4b}$$

(A (4a) egyenletben ω-ra a $[0,\infty]$ intervallum helyett $[-\infty,\infty]$-re integráltunk, és az eredményt osztottuk 2-vel.)

A (4a) egyenletből kivonva a (4b) egyenlet i-szeresét, egyszerű átalakítás után azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\left(\int_{t=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\omega. \tag{5}$$

Ez a *Fourier-féle integrálformula komplex alakja.*

Hangsúlyozzuk, hogy a fentiek nem tekinthetők matematikai levezetésnek, csupán formális átalakításoknak. Ugyanakkor igazolható, hogy a fenti formula valóban érvényes egy jól definiálható, tág függvényosztályra.

3. A Fourier-transzformáció

Az (5) formula motiválja a Fourier-transzformációnak és inverzének a következő definícióját.

1. Definíció. *Legyen az f függvény abszolút integrálható. Ekkor az F* Frourier-transzformáltja*:*

$$\mathcal{F}[f](\omega) = F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Az F függvény inverz Fourier-transzformáltja*:*

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} F(\omega)\,\mathrm{d}\omega. \tag{7}$$

Az (5) formula alapján $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}^{-1}[F] = f$.

Megjegyezzük, hogy az irodalomban találkozhatunk olyan definíciókkal is, amelyek a fentitől két ponton is eltérhetnek. Egyrészt, bizonyos szerzők a Fourier-transzformációban szerepeltetik az $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$ szorzót és az inverz transzformációban ennek konjugáltját. Másrészt, egyes helyeken a Fourier-transzformációban szerepel az integrál előtt az $\frac{1}{2\pi}$ szorzó, megint más helyeken mindkét irányú transzformációnál $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ szorzót alkalmaznak. Mi az 1. definícióban rögzített konvenciókat alkalmazzuk.

A Fourier-transzformációt a legtöbbször úgy interpretáljuk, hogy az $f(t)$ egy időtől függő jel, $F(\omega)$ pedig a jelben levő ω körfrekvenciájú komponens komplex amplitúdója.

2. Tétel. *Legyen f abszolút integrálható függvény (azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$), és legyen F a Fourier-transzformáltja. Ekkor F (a) korlátos; (b) folytonos; és (c) $\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) = 0$.*

Bizonyítás.

(a)

$$|F(\omega)| = \left| \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_{x=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right|}_{=1} |f(x)|\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

(Az első becslésnél felhasználtuk, hogy a valósban egyszerűen igazolható $\left|\int g\right| \le \int |g|$ állítás komplex értékű g függvényekre is igaz.)

(b) Legyen $\omega_1 < \omega_2$, $\omega := \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ és $\Delta\omega := \omega_2 - \omega_1$. Ekkor $\omega_2 = \omega + \frac{1}{2}\Delta\omega$, $\omega_1 = \omega - \frac{1}{2}\Delta\omega$, és az F Fourier-transzformált megváltozása:

$$|\Delta F| = |F(\omega_2) - F(\omega_1)| = \left| \int_{x=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 x}\right)}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{2}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{2}x}}_{-2\mathrm{i}\sin(\frac{\Delta\omega}{2}x)}\right)} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le$$

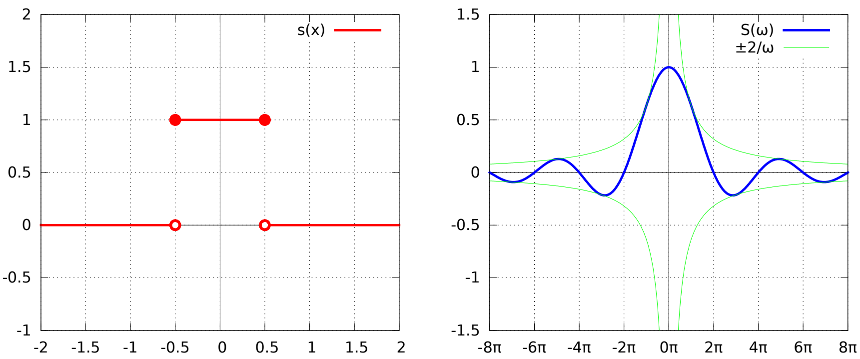
$$\le 2\underbrace{\int_{-\infty}^{-\Omega} |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{\le\varepsilon} + 2\underbrace{\int_{\Omega}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{\le\varepsilon} + 2\int_{-\Omega}^{\Omega} \underbrace{\left|\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}x\right)\right|}_{\le \frac{1}{2}\Omega\,\Delta\omega} \cdot |f(x)|\,\mathrm{d}x \le$$

$$\le 4\varepsilon + \underbrace{\Omega\,\Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{\to 0,\ \text{ha } \Delta\omega\to 0} \le 5\varepsilon,$$

ha teszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\Delta\omega$ elegendően kicsiny. (Mivel f abszolút integrálható, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén találunk alkalmas $\Omega(\varepsilon)$ értéket, amelyre az első két becslés helyes. Ezután rögzített Ω mellett választunk egy kellően kicsiny $\Delta\omega$ értéket, amelyre a harmadik becslés is helyes.)
Ezzel igazoltuk, hogy az F Fourier-transzformált függvény folytonos.

(c) Nem bizonyítjuk.

□



1. ábra. Az $s(x)$ egységnyi négyszögimpulzus és $S(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin(\frac{\omega}{2})$ Fourier-transzformáltja.

Megjegyezzük, hogy a 2. tétel (b) és (c) állításából következik az (a) állítás.

3. Példa. *Határozzuk meg az*

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{ha } |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

„négyszögimpulzus" Fourier-transzformáltját!

Megoldás. A Fourier-transzformáció során az integrálást csak a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumra kell elvégezni, mert ezen kívül s nulla. A komplex exponenciális függvényt az Euler-formulával alakítsuk át, és vegyük észre, hogy a képzetes rész integrálja nulla, mert a szinusz függvény páratlan:

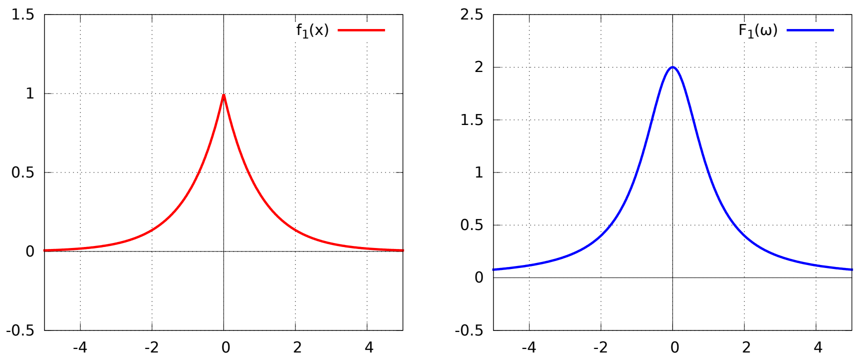
$$\mathcal{F}[s](\omega) = \int_{x=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}_{\cos(\omega x)-\mathrm{i}\sin(\omega x)} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\right]_{x=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 0\cdot\mathrm{i} = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (8)$$

Az s négyszögimpulzusnak és $S = \mathcal{F}[s]$ Fourier-transzformáltjának grafikonja az 1. ábrán látható. □

4. Példa. *Határozzuk meg az $f_\gamma(x) = \mathrm{e}^{-\gamma|x|}$ függvény Fourier-transzformáltját, ahol $\gamma > 0$!*

Megoldás. A Fourier-transzformációban szereplő integrált bontsuk ketté a negatív félegyenesre, ahol $|x| = -x$, és a pozitív félegyenesre, ahol $|x| = x$. Ezután a negatív félegyenesen hajtsuk végre az $y = -x$ változócserét, és vonjuk össze a két integrált:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_\gamma](\omega) &= \int_{x=-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{e}^{\gamma x}\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{e}^{-\gamma x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{y=\infty}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega y}\mathrm{e}^{-\gamma y}(-\mathrm{d}y) + \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{e}^{-\gamma x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{x=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right)\mathrm{e}^{-\gamma x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{x=0}^{\infty} \cos(\omega x)\mathrm{e}^{-\gamma x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$



2. ábra. Az $f_1(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ függvény és $F_1(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ Fourier-transzformáltja.

A kapott integrál kétszeri parciális integrálással kapható meg:

$$I_\gamma(\omega) = \int_0^\infty \cos(\omega x)\mathrm{e}^{-\gamma x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\mathrm{e}^{-\gamma x}\right]_{x=0}^\infty}_{0} - \frac{-\gamma}{\omega}\int_0^\infty \sin(\omega x)\mathrm{e}^{-\gamma x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\gamma}{\omega}\underbrace{\left[\frac{-\cos(\omega x)}{\omega}\mathrm{e}^{-\gamma x}\right]_{x=0}^\infty}_{\frac{1}{\omega}} - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\underbrace{\int_0^\infty \cos(\omega x)\mathrm{e}^{-\gamma x}\,\mathrm{d}x}_{I_\gamma(\omega)} = \frac{\gamma}{\omega^2} - \frac{\gamma^2}{\omega^2}I_\gamma(\omega),$$

ahonnan $I_\gamma(\omega) = \frac{\gamma}{\gamma^2+\omega^2}$, tehát

$$\mathcal{F}[f_\gamma](\omega) = F_\gamma(\omega) = \frac{2\gamma}{\gamma^2+\omega^2}.$$

Az $f_1(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ függvénynek és $F_1 = \mathcal{F}[f_1]$ Fourier-transzformáltjának grafikonja a 2. ábrán látható ($\gamma = 1$). □

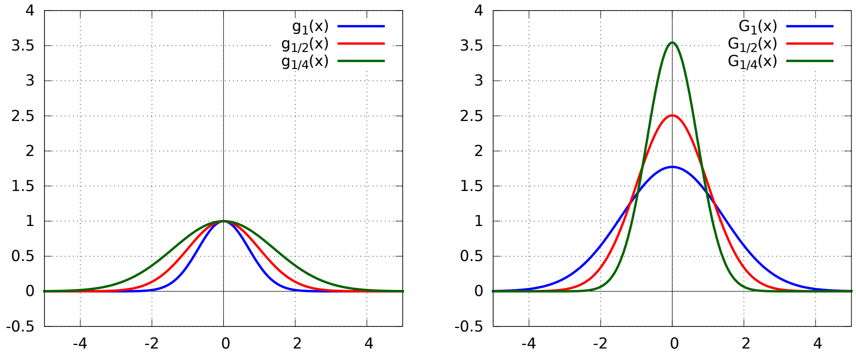
5. Példa. *Határozzuk meg a $g_a(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$ függvény (Gauss-görbe) Fourier-transzformáltját, ahol $a > 0$!*

Megoldás. A Fourier-transzformációban vonjuk össze a két exponenciális tényezőt, és alakítsunk teljes négyzetté a kitevőben:

$$\mathcal{F}[g_a](\omega) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-ax^2-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-a(x+\frac{\mathrm{i}\omega}{2a})^2}\,\mathrm{d}x$$

A továbblépéshez komplex függvénytani ismeretekre van szükség. Az integrandus mindenütt reguláris, és $x \to \pm\infty$ esetén nullához tart, ezért Cauchy-tétele alapján a valós tengely helyett integrálhatunk az $y = -\frac{\mathrm{i}\omega}{2a}$ egyenes mentén is. Ekkor azonban a $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ Gauss-integrálhoz jutunk, amiről tudjuk, hogy $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Tehát a Fourier-transzformált:

$$\mathcal{F}[g_a](\omega) = G_a(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$



3. ábra. Az $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ paraméterhez tartozó Gauss-görbék (bal oldalon) és Fourier-transzformáltjuk (jobb oldalon).

Speciálisan $a = \frac{1}{2}$ esetén a Fourier-transzformáció egy „sajátvektorát” kapjuk:

$$\mathcal{F}[x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}](\omega) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}, \qquad \text{azaz} \qquad \mathcal{F}[g_{1/2}] = \sqrt{2\pi} g_{1/2}.$$

A g_1, $g_{1/2}$ és $g_{1/4}$ függvények valamint a G_1, $G_{1/2}$ és $G_{1/4}$ Fourier-transzformáltak a 3. ábrán láthatók. Megfigyelhető, hogy a szélesebb függvény Fourier-transzformáltja keskenyebb. $\square$

6. Tétel. *Legyen f és g két abszolút integrálható függvény, Fourier-transzformáltjukat jelölje F és G. Ekkor*

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha F + \beta G, \qquad \textit{(linearitás)} \tag{9a}$$

$$\mathcal{F}\Big[x \mapsto f\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big](\omega) = |a| \cdot F(a\omega), \qquad \textit{(hasonlósági, vagy dilatációs tétel)} \tag{9b}$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto f(x - x_0)](\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0} F(\omega), \qquad \textit{(eltolási tétel)} \tag{9c}$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x} f(x)](\omega) = F(\omega - \omega_0), \qquad \textit{(modulációs tétel),} \tag{9d}$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto x^n f(x)](\omega) = \mathrm{i}^n F^{(n)}(\omega), \qquad \textit{(differenciálás „frekvenciában”),} \tag{9e}$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (\mathrm{i}\omega)^n F(\omega), \qquad \textit{(differenciálás „időben”).} \tag{9f}$$

A fenti egyenletekben $\alpha, \beta, x_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, és (9e)*-ben valamint* (9f)*-ben feltesszük, hogy a bal oldalon álló Fourier-transzformáltak léteznek.*

A továbbiakban, ha explicit módon mást nem jelölünk, hallgatólagosan feltesszük, hogy a Fourier-transzformációnak alávetett függvény független változója x, és a kicsit körülményes $\mathcal{F}[x \mapsto xf(x)]$, $\mathcal{F}[x \mapsto f(x - x_0)]$ típusú jelölés helyett a pongyola, de jól érthető $\mathcal{F}[xf(x)]$, $\mathcal{F}[f(x - x_0)]$ jelölést használjuk.

Bizonyítás.
A (9a) egyenlőség az integrál linearitásából következik.

A (9b) igazolásához $y = \frac{x}{a}$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\Big[f\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big](\omega) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} f\Big(\frac{x}{a}\Big)\,\mathrm{d}x = \\ &= \operatorname{sgn}(a)\int_{y=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega y} f(y) a\,\mathrm{d}y = |a|\cdot F(a\omega).\end{aligned}$$

A $\operatorname{sgn}(a)$ tényezőre azért van szükség, mert ha $a < 0$, akkor az y változóra vett integrált fordított irányban, $+\infty$-től $-\infty$-ig kellene végezni.

A (9c) igazolásához $y = x - x_0$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x-x_0)](\omega) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} f(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega (y+x_0)} f(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0} F(\omega).\end{aligned}$$

A (9d) egyenlőség igazolásához az $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}$ szorzót bevisszük az integrálba:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x} f(x)] &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}\int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0) x} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\omega-\omega_0).\end{aligned}$$

A (9e) egyenlőséget először $n = 1$ esetén igazoljuk. Felhasználjuk, hogy $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\big) = -\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}$, és hogy az ω szerinti deriválás és az x szerinti integrálás felcserélhetőek:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[xf(x)](\omega) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} x f(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\big) f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}F'(\omega).\end{aligned}$$

Az $n > 1$ esetben a fenti formulát n-szer alkalmazzuk.

A (9f) egyenlőséget is először $n = 1$ esetén igazoljuk.

Mivel f' is Fourier-transzformálható, ezért $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$, tehát ha $a < b$ elegendően nagyok, akkor $\big|\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x\big| = |f(b) - f(a)|$ tetszőlegesen kicsiny. Mivel f is hasonlóan viselkedik, ezért $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Az f' deriváltfüggvény Fourier-transzformálásakor parciális integrálást hajtunk végre, és figyelembe vesszük, hogy a kiintegrált rész nulla:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'](\omega) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} f'(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} f(x)\big]_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{x=-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\omega F(\omega).\end{aligned}$$

Az $n > 1$ esetben a fenti formulát n-szer alkalmazzuk. $\square$

Most a függvények között értelmezett *konvolúció* műveletével ismerkedünk meg. A művelet két függvényhez egy harmadik függvényt rendel, a következő módon.

7. Definíció. *Legyen f és g két, a teljes valós számegyenesen értelmezett függvény. A két függvény $f * g$* konvolúcióját *az*

$$(f * g)(x) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

formula értelmezi, feltéve, hogy az integrál minden valós x-re létezik.

8. Lemma. *A konvolúció kommutatív, azaz $f * g = g * f$.*

Bizonyítás. A konvolúciós integrálban térjünk át a $\tau = x - t$ új változóra:

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{\tau=\infty}^{-\infty} f(x-\tau)g(\tau)\,(-\mathrm{d}\tau) = \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau)f(x-\tau)\,\mathrm{d}\tau = (g * f)(x).\end{aligned}$$ □

Látható, hogy a konvolúciós integrál mögötti szorzatban a két függvény argumentumának összege megadja az eredmény független változóját, $x = t + (x - t)$.

Egy rögzített x pontban a konvolúció értékét a

$$(f * g)(x) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(x+t)g(-t)\,\mathrm{d}t$$

integrál alapján úgy interpretálhatjuk, hogy az f függvény x körüli $f(x+t)$ értékeit a $g(-t)$ súllyal összegezzük. Maga az $f * g$ függvény f-nek a $\tilde{g}(t) = g(-t)$ súlyfüggvénnyel való „átlagolása”, „kisimítása”. (Természetesen a kommutativitás miatt f és g szerepe fölcserélhető.)

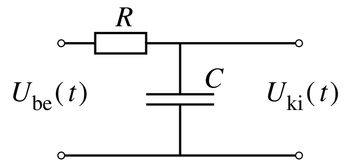
9. Tétel. *Konvolúció a Fourier-transzformáltja a tényezők Fourier-transzformáltjának szorzata, azaz*

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g],$$

feltéve, hogy a képletben szereplő integrálok léteznek.

Bizonyítás. Írjuk föl az egyenlőség bal oldalát, cseréljük föl a konvolúcióhoz és a Fourier-transzformációhoz tartozó integrálás sorrendjét, majd a belső integrálban térjünk át az x változóról az $y = x - t$ változóra. Ekkor a kettős integrál szétesik két független integrál szorzatára:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\omega) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(f(t) \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} g(x-t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \\ &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(f(t) \int_{y=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(y+t)} g(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t = \\ &= \left(\int_{t=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y} g(y)\,\mathrm{d}y \right) = \\ &= \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega).\end{aligned}$$ □



4. ábra. Az R ellenállásból és C kapacitású kondenzátorból felépített aluláteresztő szűrő.

4. Alkalmazás

A Fourier-transzformáció egyik alkalmazási területe lineáris differenciálegyenletek megoldása. Láttuk, hogy a Fourier-transzformáció a differenciálást a független változóval való szorzásba „viszi át". Ez a tulajdonság felhasználható arra, hogy differenciálegyenleteket Fourier-transzformálva algebrai egyenleteket kapjunk a keresett függvény Fourier-transzformáltjára. Az algebrai egyenletet megoldva, majd inverz Fourier-transzformációt alkalmazva megkapjuk az eredeti differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását.

A Fourier-transzformáció sajátosságából adódik, hogy ezzel a módszerrel azt a partikuláris megoldást kapjuk meg, amely a $\pm\infty$-ben nullához tart.

A módszert egy elektronikai példán, az R ellenállásból és C kondenzátorból kialakított aluláteresztő szűrő vizsgálatán keresztül mutatjuk be (4. ábra).

Feladatunk az, hogy az ismert $U_{\mathrm{be}}(t)$ bemenetre adott feszültségjel segítségével meghatározzuk a kimeneten megjelenő $U_{\mathrm{ki}}(t)$ feszültségjelet. Feltesszük, hogy mindkét jel „impulzusszerű", azaz a $t \to \pm\infty$ határesetben lecsengenek, és a kondenzátor töltése is nulla a $t \to \pm\infty$ határesetben.

Ohm-törvénye alapján az R ellenálláson a t időpillanatban folyó $I(t)$ áram:

$$I(t) = \frac{U_{\mathrm{be}}(t) - U_{\mathrm{ki}}(t)}{R}.$$

Ez az áram tölti a kondenzátort, aminek így a töltése a t időpillanatban:

$$Q(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} I(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=-\infty}^{t} \frac{U_{\mathrm{be}}(\tau) - U_{\mathrm{ki}}(\tau)}{R}\,\mathrm{d}\tau = CU_{\mathrm{ki}}(t).$$

(Felhasználtuk, hogy $Q(-\infty) = 0$ valamint, hogy a kondenzátor feszültsége, töltése és kapacitása között érvényes a $C = \frac{Q}{U}$ összefüggés.)

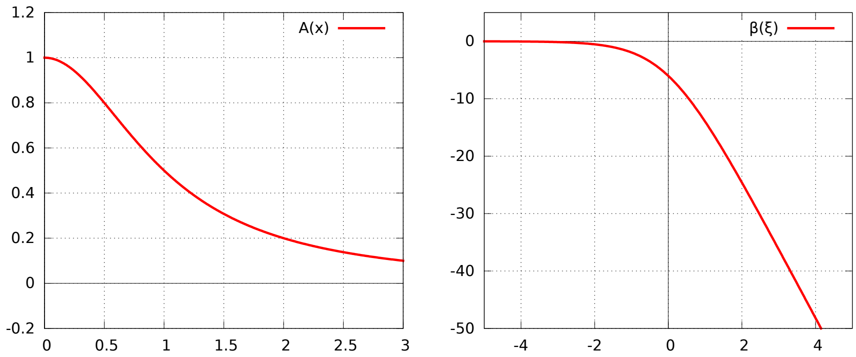
Az utolsó összefüggést differenciálva, és alkalmazva az integrálfüggvény deriváltjáról szóló tételt, rendezés után az

$$\dot{U}_{\mathrm{ki}}(t) = \frac{1}{RC}U_{\mathrm{be}}(t) - \frac{1}{RC}U_{\mathrm{ki}}(t) \tag{10}$$

elsőrendű, lineáris, inhomogén, állandó együtthatós differenciálegyenletre jutunk.

Ismert U_{be} bemeneti jel esetén az egyenletet meg tudjuk oldani. Most a Fourier-transzformáció segítségével, általános bemenő jel mellett oldjuk meg az egyenletet. Vegyük a (10) egyenlet Fourier-transzformáltját, és használjuk fel, hogy függvény deriváltjának transzformáltja a függvény transzformáltjának iω-szorosa! Azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{i}\omega\mathcal{F}[U_{\mathrm{ki}}](\omega) = \frac{1}{RC}\mathcal{F}[U_{\mathrm{be}}](\omega) - \frac{1}{RC}\mathcal{F}[U_{\mathrm{ki}}](\omega),$$



5. ábra. Az aluláteresztő szűrő karakterisztikája. A bal oldalon az A teljesítmény-csillapítás látható az $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ dimenziótlan frekvencia függvényében. A jobb oldalon ugyanez kétszer logaritmikus skálán van ábrázolva; a csillapítás decibellben, a frekvencia oktávban látható.

ahonnan

$$U_{\mathrm{ki}} = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathcal{F}[U_{\mathrm{be}}](\omega)}{1 + \mathrm{i}\omega RC}\right]. \tag{11}$$

Látható, hogy a Fourier-transzformáció segítségével a differenciálegyenlet algebrai problémává egyszerűsödött.

Hangsúlyozzuk, hogy (11) nem az általános megoldása a (10) egyenletnek, hanem az $U_{\mathrm{ki}}(-\infty) = 0$ kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldása.

Érdemes kiszámolni, hogy az áramkör adott ω körfrekvencián mennyire csillapítja a teljesítményt (ami a feszültség abszolút négyzetével arányos):

$$A(\omega) = \left|\frac{\mathcal{F}[U_{\mathrm{ki}}](\omega)}{\mathcal{F}[U_{\mathrm{be}}](\omega)}\right|^2 = \left|\frac{1}{1 + \mathrm{i}\omega RC}\right|^2 = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Látható, hogy $\lim_{\omega\to 0+} A(\omega) = 1$ és $\lim_{\omega\to\infty} A(\omega) = 0$, tehát az áramkör valóban az alacsony frekvenciájú komponenseket engedi át. Az $A(\omega_0) = \frac{1}{2}$ egyenlettel definiált küszöbfrekvencia: $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Be szokás vezetni az $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ dimenziótlan frekvenciát, valamint a $\beta = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg(\mathrm{A})$ logaritmikus csillapítást és a $\xi = \log_2(x)$ logaritmikus frekvenciát (oktáv). Az 5. ábra ezekkel a mennyiségekkel mutatja az aluláteresztő szűrő átviteli karakterisztikáját. Nagy frekvenciákon a csillapítás közel 12 decibell oktávonként.

5. Feladatok

A * jel arra utal, hogy a feladat nehéz, a normál gyakorlatnak nem anyaga.

1. Legyen az f függvény $2L$ szerint periodikus ($L > 1$), és a $[-L, L]$ intervallumon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| \le \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg f Fourier-sorát! Hogyan változik a Fourier-sor az $L \to \infty$ határesetben?

(b*) Hogyan kapható meg a Fourier-sorból a négyszögimpulzus Fourier-transzformáltja?

2. Vezessük be a következő függvény-transzformációkat:

$$\begin{aligned} (\tau_h f)(x) &:= f(x+h) && \text{eltolás } (h \in \mathbb{R}), \\ (\nu_\Omega f)(x) &:= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega x} f(x) && \text{moduláció } (\Omega \in \mathbb{R}), \\ (\delta_a f)(x) &:= f(ax) && \text{dilatáció } (a \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(a) Fejezzük be a következő egyenlőségeket úgy, hogy a jobboldalon az $F = \mathcal{F}[f]$ Fourier-transzformált függvényt tartalmazó kifejezés álljon!

$$\text{(i)} \quad \mathcal{F}[\tau_h f] = ? \qquad \text{(ii)} \quad \mathcal{F}[\nu_\Omega f] = ? \qquad \text{(iii)} \quad \mathcal{F}[\delta_a f] = ?$$

(b) Fejezzük be a következő egyenlőségeket úgy, hogy a jobboldalon az $f = \mathcal{F}^{-1}[F]$ inverz Fourier-transzformált függvényt tartalmazó kifejezés álljon!

$$\text{(i)} \quad \mathcal{F}^{-1}[\tau_h F] = ? \qquad \text{(ii)} \quad \mathcal{F}^{-1}[\nu_\Omega F] = ? \qquad \text{(iii)} \quad \mathcal{F}^{-1}[\delta_a F] = ?$$

(c*) Hogyan „kommutálnak” a τ_h, ν_Ω és δ_a operátorok egymással?

3. Az $\mathcal{F}[f] = F$ függvény segítségével fejezzük ki a következő függvények Fourier-transzformáltját!

$$\text{(a)} \quad f(2x-3), \qquad \text{(b)} \quad f\big(2(x-3)\big),$$
$$\text{(c)} \quad \big(x^2 f(3x)\big)'', \qquad \text{(d)} \quad x^3 f''(x-3).$$

4. Jelölje $f(x)$ az $x_0 - \frac{b}{2}$ ponttól az $x_0 + \frac{b}{2}$ pontig terjedő, $a > 0$ magasságú, $b > 0$ szélességű négyszögimpulzust! Határozzuk meg f Fourier-transzformáltját! Hogyan változik a Fourier-transzformált az x_0, a illetve b paraméterek változtatásakor?

5. Határozzuk meg a következő függvények Fourier-transzformáltját!

$$\text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0,1], \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (0,1), \\ -1, & \text{ha } x \in (-1,0), \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \qquad \text{(d)} \quad f(x) = \mathrm{e}^{-|x|},$$

$$\text{(e)} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| \in [2,3], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

6. Legyen s az origó középpontú, egységnyi magas, egységnyi széles négyszögimpulzus! Az egyenlőség mindkét oldalának kiszámolásával igazoljuk, hogy $\mathcal{F}[s * s] = \big(\mathcal{F}[s]\big)^2$!

7. Tudjuk, hogy

$$\mathcal{F}[x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}](\omega) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

   (a) Mi a Fourier-transzformáltja $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2(x-3)^2}$-nek?

   (b) Mi a Fourier-transzformáltja $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2+2x}$-nek?

   (c) Minek a Fourier-transzformáltja $H(\omega) = 3\mathrm{e}^{-2(\omega-3)^2}$?

8. Tudjuk, hogy

$$\mathcal{F}[x \mapsto \mathrm{e}^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

   (a) Mi a Fourier-transzformáltja $f(x) = \mathrm{e}^{-|3x-6|}$-nak?

   (b) Minek a Fourier-transzformáltja $G(\omega) = \dfrac{3}{\omega^2+2\omega+5}$?

6. Megoldások, végeredmények

Emlékeztetünk arra a megállapodásra, hogy – ha nincs másképp jelölve, akkor – az x változót tekintjük a Fourier-transzformálandó függvény független változójának, és például az $f(x) = x^2$ függvény Fourier-transzformáltját $\mathcal{F}[f]$ vagy $\mathcal{F}[x \mapsto x^2]$ helyett egyszerűen $\mathcal{F}[x^2]$-tel jelöljük.

1. Megoldás. (a) A (2) formulákat alkalmazva megkapjuk a Fourier-együtthatókat:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{L},$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{páratlan}}\mathrm{d}x = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{páros}}\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2L}\right).$$

Így az (1) összefüggés szerint az f függvény Φ Fourier-sora:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2}{n\pi}}_{\frac{2\Delta\omega}{\pi\omega_n}} \sin\Big(\underbrace{\frac{n\pi}{2L}}_{\omega_n/2}\Big)\cos\Big(\underbrace{\frac{n\pi}{L}}_{\omega_n}x\Big). \tag{12}$$

Az $L \to \infty$ határesetben a konstans tag eltűnik, és a kifejtéshez használt $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ frekvenciák egyre sűrűbben helyezkednek el.

(b*) A (12 összegben egy $[0, \infty)$ intervallumra felírt, $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ osztópontú, $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$ egyenközű integrál-közelítőösszeget ismerhetünk fel, amit az $L \to \infty$ határesetben az (improprius) integrállal helyettesítünk:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos(\omega x)\,\mathrm{d}\omega.$$

Most használjuk fel, hogy az integrandus páros, így vehetjük a teljes intervallumon vett integrál felét. Továbbá $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega/2)}{\omega} \sin(\omega x)\,\mathrm{d}\omega = 0$, hiszen az integrandus páratlan. Így

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \big(\underbrace{\cos(\omega x) + \mathrm{i} \sin(\omega x)}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}} \big)\,\mathrm{d}\omega = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right].$$

Tehát az $L \to \infty$ határesetben a Fourier-sorfejtésből a fenti módon megkapjuk az egységnyi négyszögimpulzus Fourier-transzformáltját (3. példa, (8) egyenlet).

2. Megoldás. A feladat első két pontja lényegében a 6 tétel egy-egy pontjának átfogalmazása.

(a) (i) Az $y = x + h$ helyettesítést hajtjuk végre:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\tau_h f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} f(\underbrace{x+h}_{y})\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(y-h)x}}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega h}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}} f(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega h} F(\omega) = (\nu_h F)(\omega), \end{aligned}$$

tehát $\boxed{\mathcal{F}[\tau_h f] = \nu_h \mathcal{F}[f]}$.

(ii) A két exponenciális szorzót összevonjuk:

$$\mathcal{F}[\nu_\Omega f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega x}}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\Omega)x}} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\omega - \Omega) = (\tau_{-\Omega} F)(\omega),$$

tehát $\boxed{\mathcal{F}[\nu_\Omega f] = \tau_{-\Omega} \mathcal{F}[f]}$.

(iii) A 6. tétel (9b) egyenlősége alapján $\boxed{\mathcal{F}[\delta_a f](\omega) = \frac{1}{|a|} \delta_{1/a} \mathcal{F}[f]}$.

(b) Az előző részhez hasonlóan számolunk. A következő eredmények adódnak:

(i) $\boxed{\mathcal{F}^{-1}[\tau_h f] = \nu_{-h} \mathcal{F}^{-1}[f]}$,

(ii) $\boxed{\mathcal{F}^{-1}[\nu_\Omega f] = \tau_\Omega \mathcal{F}^{-1}[f]}$,

(iii) $\boxed{\mathcal{F}^{-1}[\delta_a f](\omega) = \frac{1}{|a|} \delta_{1/a} \mathcal{F}^{-1}[f]}$.

(c*) Ebben a részben arra világítunk rá, hogy egy függvény transzformálásakor az eltolás, moduláció illetve dilatáció (skálázás) sorrendje *nagyon fontos*. Feladatmegoldásnál jól meg kell gondolnunk ezen transzformációk sorrendjét.

(i) $(\tau_h \nu_\Omega f)(x) = (\nu_\Omega f)(x+h) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega(x+h)} f(x+h) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega h} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega x} (\tau_h f)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega h} (\nu_\Omega \tau_h f)(x)$, tehát $\boxed{\tau_h \nu_\Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega h} \nu_\Omega \tau_h}$.

(ii) $(\tau_h \delta_a f)(x) = (\delta_a f)(x+h) = f\big(a(x+h)\big) = f(ax + ah) = (\tau_{ah} f)(ax) = (\delta_a \tau_{ah} f)(x)$, tehát $\boxed{\tau_h \delta_a = \delta_a \tau_{ah}}$.

(iii) $(\nu_\Omega \delta_a f)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega x} (\delta_a f)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\Omega}{a} ax} f(ax) = (\nu_{\Omega/a} f)(ax) = (\delta_a \nu_{\Omega/a} f)(x)$, tehát $\boxed{\nu_\Omega \delta_a = \delta_a \nu_{\Omega/a}}$.

3. Megoldás. Az előző feladatban illetve a 6. tételben megismert szabályokat alkalmazzuk. Ügyeljünk a transzformációk helyes sorrendjére!

(a) Az $x \mapsto f(2x{-}3)$ függvényt az f függvényből úgy kapjuk, hogy f grafikonját *először* eltoljuk 3-mal jobbra, *majd ezután* az x tengelyt egy kettes faktorral átskálázzuk, tehát $f(2x-3) = (\delta_2 \tau_{-3} f)(x)$. Így

$$\mathcal{F}[f(2x-3)](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f(x-3)]\Big(\frac{\omega}{2}\Big) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2}(-3)}\mathcal{F}[f]\Big(\frac{\omega}{2}\Big) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\mathrm{i}\omega}F\Big(\frac{\omega}{2}\Big).$$

(b) Most a transzformációk sorrendje fordított: $f\big(2(x-3)\big) = (\tau_{-3}\delta_2 f)(x)$! Tehát

$$\mathcal{F}\big[f\big(2(x-3)\big)\big](\omega) = \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}[f(2x)](\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega}F\Big(\frac{\omega}{2}\Big).$$

(c) A legkülső transzformáció a deriválás; először erre alkalmazzuk a (9f) szabályt. Ezután az x^2-tel való szorzásra alkalmazzuk a (9e) összefüggést. Végül felhasználjuk a (9b) skálázási szabályt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big[\big(x^2 f(3x)\big)''\big](\omega) &= (\mathrm{i}\omega)^2\mathcal{F}\big[x^2 f(3x)\big](\omega) = -\omega^2\mathrm{i}^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\mathcal{F}[f(3x)](\omega) = \\ &= \omega^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\Big(\frac{1}{3}F\Big(\frac{\omega}{3}\Big)\Big) = \frac{\omega^2}{27}F''\Big(\frac{\omega}{3}\Big).\end{aligned}$$

(d) Az eddig megismert szabályokat alkalmazzuk itt is, csak más sorrendben:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big[x^3 f''(x-3)\big](\omega) &= \mathrm{i}^3\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\omega^3}\mathcal{F}[f''(x-3)](\omega) = \\ &= -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\omega^3}\Big((\mathrm{i}\omega)^2\mathcal{F}[f(x-3)](\omega)\Big) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\omega^3}\big(\omega^2\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega}F(\omega)\big).\end{aligned}$$

4. Megoldás. Kétféleképpen oldhatjuk meg a feladatot. Vagy a 3. példában megismert egységnyi négyszögimpulzust transzformáljuk a 2. feladatban szereplő transzformációkkal, vagy közvetlenül a Fourier-transzformáció a (6) definíciója alapján számolunk.
Az első utat követjük. Az s egységnyi négyszögimpulzusból az f négyszögjel úgy kapható meg, hogy először $\frac{1}{b}$-vel dilatálunk, majd x_0-al jobbra tolunk és végül a-val megszorozzuk a függvényt, tehát

$$f = a\cdot\tau_{-x_0}\delta_{1/b}s, \qquad f(x) = a\cdot s\Big(\frac{x-x_0}{b}\Big).$$

Így f Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\omega) &= a\cdot\mathcal{F}\Big[s\Big(\frac{x-x_0}{b}\Big)\Big](\omega) = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}\mathcal{F}\Big[s\Big(\frac{x}{b}\Big)\Big](\omega) = \\ &= ab\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}\mathcal{F}[s(x)](b\omega) = ab\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}\frac{2}{b\omega}\sin\Big(\frac{b\omega}{2}\Big) = \frac{2a}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}\sin\Big(\frac{b\omega}{2}\Big).\end{aligned}$$

Látható, hogy a a Fourier-transzformált magasságát szabályozza, x_0 modulálja az eredményt, b pedig az x tengelyt skálázza. Minél szélesebb az eredeti négyszögjel, annál sűrűbb a Fourier-transzformált.

5. Megoldás. A Fourier-transzformáltak most is vagy közvetlenül az 1. definíció (6) képletével számolhatók ki, vagy már ismert Fourier-transzformáltakból a 6. tétel illetve a 2. feladat összefüggéseivel kaphatók meg.

(a) Számoljunk a definícióval! Egy parciális integrálást kell végrehajtanunk.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega} x\right]_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{(-\mathrm{i}\omega)^2}\right]_{x=0}^1 = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}.\end{aligned}$$

(b) Most számoljunk a szabályokkal, és használjuk fel, hogy ismerjük az s egységnyi négyszögimpulzus Fourier-transzformáltját (3. példa)! Látható, hogy $f = (\tau_{-1/2} - \tau_{1/2})s$, tehát:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \big(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega}{2}}\big)\mathcal{F}[s](\omega) = -\frac{4\mathrm{i}}{\omega}\sin^2\Big(\frac{\omega}{2}\Big).$$

(c) A definíció alapján dolgozunk:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\omega) &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\omega+1)x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{P\to\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\omega+1)x}}{-(\mathrm{i}\omega+1)}\right]_{x=0}^P = \frac{1}{1+\mathrm{i}\omega} = \frac{1-\mathrm{i}\omega}{1+\omega^2}.\end{aligned}$$

(d) A feladat megoldását a 4. példa szerint számolhatjuk, $\gamma = 1$ mellett. Azt kapjuk, hogy:

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

(e) Most is az s egységnyi négyszögimpulzus eltoltjaiból kapható meg az f függgvény, $f = (\tau_{5/2} + \tau_{-5/2})s$, így

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\omega) &= \mathcal{F}\Big[s\Big(x+\frac{5}{2}\Big)\Big](\omega) + \mathcal{F}\Big[s\Big(x-\frac{5}{2}\Big)\Big](\omega) = \\ &= \Big(\mathrm{e}^{\frac{5}{2}\mathrm{i}\omega} + \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}\mathrm{i}\omega}\Big)\mathcal{F}[s](\omega) = \frac{4}{\omega}\cos\Big(\frac{5\omega}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\omega}{2}\Big).\end{aligned}$$

6. Megoldás. Legyen $f = s * s$, azaz

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{s(x-t)}_{s(t-x)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x \in [-1,0], \\ 1-x, & \text{ha } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Az f Fourier-transzformáltját parciális integrálással kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\omega) &= \int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}(1+x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}(1-x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \underbrace{\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}(1+x)\right]_{-1}^0}_{\mathrm{i}/\omega} - \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}(1-x)\right]_0^1}_{-\mathrm{i}/\omega} - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}(-1)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\underbrace{\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{(\mathrm{i}\omega)^2}\right]_{-1}^0}_{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-1)/\omega^2} + \underbrace{\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{(\mathrm{i}\omega)^2}\right]_0^1}_{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})/\omega^2} = \frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2} = \left(\frac{2}{\omega}\sin\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\right)^2 = \big(\mathcal{F}[s](\omega)\big)^2.\end{aligned}$$

Az s egységnyi négyszögimpulzus Fourier-transzformáltját a 3. példában számoltuk ki.

7. Megoldás. A feladatban megadott Fourier-transzformáltat az 5. példában számoltuk ki. A megoldáshoz az ismert transzformációs szabályokat alkalmazzuk.

(a) Először a kitevőt alakítjuk át: $-2(x-3)^2 = -\frac{(2(x-3))^2}{2}$. Ezután alkalmazzuk a már jól ismert transzformációs szabályokat:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 3\mathcal{F}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{(2(x-3))^2}{2}}\Big](\omega) = 3\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{(2x)^2}{2}}\Big](\omega) =$$
$$= \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\Big]\Big(\frac{\omega}{2}\Big) = \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{8}}.$$

(b) A kitevőt teljes négyzetté alakítjuk:

$$-x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 = -\frac{\big(\sqrt{2}(x-1)\big)^2}{2} + 1.$$

Ezt felhasználva g Fourier-transzformáltja:

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \mathrm{e}\mathcal{F}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{2}(x-1))^2}{2}}\Big](\omega) = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{2}x)^2}{2}}\Big](\omega) = \mathrm{e}^{1-\mathrm{i}\omega}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

(c) A feladatot a (7a) feladathoz hasonlóan oldjuk meg. Vigyázzunk az inverz Fourier-transzformáció és a Fourier-transzformáció közti különbségekre!

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}[H](x) = 3\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{(2(\omega-3))^2}{2}}\Big](x) = 3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{(2\omega)^2}{2}}\Big](x) =$$
$$= \frac{3}{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}\Big]\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}.$$

8. Megoldás. A feladatban megadott Fourier-transzformáltat a 4. példában számoltuk ki.

(a) Először a (9b) dilatációs formulát, aztán az eltolásra érvényes (9c) formulát alkalmazzuk:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}\big[\mathrm{e}^{-|3x-6|}\big](\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}\big[\mathrm{e}^{-|x-6|}\big]\Big(\frac{\omega}{3}\Big) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\omega/3}\mathcal{F}\big[\mathrm{e}^{-|x|}\big]\Big(\frac{\omega}{3}\Big) =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega}}{3}\frac{2}{1+\big(\frac{\omega}{3}\big)^2} = \frac{6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega}}{9+\omega^2}.$$

(b) A nevezőben teljes négyzetté alakítunk, és a (2b) feladatban levezetett (2b) összefüggéseket alkalmazzuk:

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}[G](x) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{3}{(\omega+1)^2+4}\Big](x) = \frac{3}{8}\mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{2}{\big(\frac{\omega+1}{2}\big)^2+1}\Big](x) =$$
$$= \frac{3}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{2}{(\omega/2)^2+1}\Big](x) = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{2}{\omega^2+1}\Big](2x) = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-|2x|}.$$