1. feladatsor – elméleti összefoglaló

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat* ***konvergens*** *és* ***határértéke*** *$A \in \mathbb{R}$ (jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$), ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozatot ***divergensnek*** *nevezzük, ha nem konvergens.*

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat* ***határértéke*** *$+\infty$, ha minden $P \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$a_n > P.$$

3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat* ***határértéke*** *$-\infty$, ha minden $P \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$a_n < -P.$$

2. feladatsor – elméleti összefoglaló

1. Tétel. (A sorozat-határérték műveleti tulajdonságai.) *Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan konvergens számsorozatok, amelyekre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, továbbá legyen $c \in \mathbb{R}$ és $p \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor a következő állítások teljesülnek.*

- *A $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok konvergensek és*
$$\lim_{n\to\infty} ca_n = cA \qquad \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B \qquad \lim_{n\to\infty} a_nb_n = AB$$
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A| \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^p = A^p.$$
- *Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $b_n \neq 0$ és $B \neq 0$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$
- *Ha $p \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq 0$, akkor a $(\sqrt[p]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{A}.$$

2. Tétel. *Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozatok. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = 0$.*

3. Tétel. (Nevezetes sorozat-határértékek I.)

$$\lim_{n\to\infty} c = c \quad (c \in \mathbb{R}) \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } |q| < 1 \\ 1 & , \text{ ha } q = 1 \\ +\infty & , \text{ ha } q > 1 \\ \text{nem létezik} & , \text{ ha } q \leq -1 \end{cases} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \log_a(n) = +\infty \quad (a > 1)$$

4. Tétel. (Nagyságrendek.) *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $a > 1$ és $k > 0$. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a(n)}{n^k} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

5. Tétel. (Nevezetes sorozat-határértékek II.)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0) \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

6. Tétel. (Rendőrelv.) *Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan számsorozatok, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:*

- *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozatok, továbbá*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: A,$$
- *létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén*
$$a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Ekkor $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

7. Tétel. (Speciális rendőrelv.) *Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan számsorozatok, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:*

- *$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (illetve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$);*
- *létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén*
$$a_n \leq b_n \quad (\text{illetve } a_n \geq b_n).$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ (illetve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$).

3-4. feladatsor – elméleti összefoglaló

1. Tétel. *Legyenek* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *számsorozatok. Ha* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *és* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *korlátos, akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

2. Tétel. (Rendőrelv.) *Legyenek* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan számsorozatok, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:*

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergens sorozatok, továbbá*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: A,$$
- *létezik olyan* $N \in \mathbb{N}$, *hogy minden* $n \in \mathbb{N}$ *és* $n \geq N$ *esetén*
$$a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Ekkor $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *is konvergens és* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

3. Tétel. *Ha egy sorozat monoton növő (illetve csökkenő) és felülről (illetve alulról) korlátos, akkor konvergens.*

4. Tétel. *Az* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ *sorozat monoton növő és felülről korlátos.*

5. Jelölés.
$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

6. Megjegyzés. *Bizonyítható, hogy az* $e \approx 2,71828\ldots$ *szám irracionális, sőt transzcendens szám, azaz nem létezik olyan egész együtthatós polinom, amelynek e zérushelye.*

7. Tétel. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

8. Definíció. *Legyen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *számsorozat és* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *szigorúan monoton növő függvény. Ekkor az* $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatot az* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat egy* ***részsorozatának*** *nevezzük.*

9. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens és a határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.*

10. Definíció. *Legyen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *számsorozat. Ekkor* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *legkisebb (illetve legnagyobb) torlódási pontját* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$*-nel (illetve* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$*-nel) jelöljük és a sorozat* ***limesz inferiorjának*** *(illetve* ***limesz szuperiorjának****) nevezzük.*

11. Tétel. *Az* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *számsorozat pontosan akkor konvergens, ha*
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R},$$
és ekkor
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

---

12. Definíció. *A* $z \in \mathbb{C}$ *komplex szám* ***algebrai alakja****:*
$$z = a + b\mathbf{i},$$
ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

13. Definíció. *Legyen* $z := a + b\mathbf{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

- z ***valós része****:* $\mathrm{Re}(z) := a$,
- z ***képzetes része****:* $\mathrm{Im}(z) := b$,
- z ***konjugáltja****:* $\overline{z} := a - b\mathbf{i}$,
- z ***abszolút értéke****:* $|z| := \sqrt{a^2+b^2}$.

14. Állítás. *Legyen* $z := a + b\mathbf{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. *Ekkor*
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

4-5. feladatsor – elméleti összefoglaló

1. Definíció. *A $z \in \mathbb{C}$ komplex szám* ***trigonometrikus alakja****:*

$$z = |z|\Big(\cos(\alpha) + \mathbf{i}\sin(\alpha)\Big),$$

ahol α a valós tengellyel bezárt szöget jelöli $(0 \le \alpha < 2\pi)$.

2. Állítás. (Műveletek trigonometrikus alakban.) *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valamint*

$$z := |z|(\cos(\alpha) + \mathbf{i}\sin(\alpha)), \quad w := |w|(\cos(\beta) + \mathbf{i}\sin(\beta))$$

Ekkor

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + \mathbf{i}\sin(\alpha+\beta))$$
$$z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + \mathbf{i}\sin(n\alpha))$$

3. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, valamint*

$$z := |z|(\cos(\alpha) + \mathbf{i}\sin(\alpha))$$

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)\right) \,\middle|\, k = 0, 1, \dots n-1 \right\}$$

Az $\sqrt[n]{z}$ halmaz elemeit a z komplex szám ***komplex értelemben vett n-edik gyökeinek*** *nevezzük.*

---

4. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy f-nek* ***$+\infty$-beli*** *(illetve* ***$-\infty$-beli****)* ***határértéke*** *$A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\Omega > 0$, hogy minden $x \in D_f$ esetén*

$$x > \Omega \ (\textit{illetve } x < -\Omega) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

5. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$ az értelmezési tartományának egy torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy f-nek* ***x_0-beli határértéke*** *$A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in D_f$ esetén*

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

6. Tétel. (Határérték és függvényműveletek kapcsolata.) *Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények, és a az értelmezési tartományaik egy torlódási pontja, és tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Ekkor:*

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$B \in \mathbb{R}$	$B = +\infty$	$B = -\infty$
$A \in \mathbb{R}$	$A + B$	$+\infty$	$-\infty$
$A = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	???
$A = -\infty$	$-\infty$	???	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$	$0 < B < +\infty$	$B = 0$	$-\infty < B < 0$	$B = +\infty$	$B = -\infty$
$0 < A < +\infty$	AB	0	AB	$+\infty$	$-\infty$
$A = 0$	0	0	0	???	???
$-\infty < A < 0$	AB	0	AB	$-\infty$	$+\infty$
$A = +\infty$	$+\infty$	???	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$A = -\infty$	$-\infty$	???	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$0 < B < +\infty$	$B = 0$	$-\infty < B < 0$	$B = +\infty$	$B = -\infty$
$0 < A < +\infty$	$\frac{A}{B}$	???	$\frac{A}{B}$	0	0
$A = 0$	0	???	0	0	0
$-\infty < A < 0$	$\frac{A}{B}$	???	$\frac{A}{B}$	0	0
$A = +\infty$	$+\infty$	???	$-\infty$	???	???
$A = -\infty$	$-\infty$	???	$+\infty$	???	???

6. feladatsor – elméleti összefoglaló

1. Állítás. *Minden* $a \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\lim_{x \to a-} \frac{1}{x-a} = -\infty \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x \to a+} \frac{1}{x-a} = +\infty$$

2. Állítás. *Legyen* $k \in \mathbb{R}^+$. *Ekkor*

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^k} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^k} = \begin{cases} +\infty & , \textit{ ha } k \in \mathbb{N}^+ \textit{ és } k \textit{ páros} \\ -\infty & , \textit{ ha } k \in \mathbb{N} \textit{ és } k \textit{ páratlan} \end{cases}$$

3. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény és* a *egy belső pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *Az* f *függvények létezik (kétoldali) határértéke* a *pontban.*

(ii) *Az* f *függvények létezik jobb- és baloldali határértéke* a*-ban, és* $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

Továbbá, bármelyik állítás teljesülése esetén ekkor $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

4. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény. Azt mondjuk, hogy* $x_0 \in D_f$ ***szakadási pontja*** f*-nek, ha* f *nem folytonos* x_0*-ban.*

5. Definíció (Szakadási helyek osztályozása). *Legyen* $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény, valamint* $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ *szakadási pontja* f*-nek.*

- *Azt mondjuk, hogy* f*-nek* ***megszüntethető szakadása*** *van* x_0*-ban, ha* f*-nek létezik véges határértéke* x_0*-ban és*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$
- *Azt mondjuk, hogy* f*-nek* ***ugrás típusú szakadása*** *(vagy röviden: ugrása) van* x_0*-ban, ha* f*-nek létezik véges jobb- és baloldali határértéke* x_0*-ban és*
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0+} f(x).$$
- *Azt mondjuk, hogy* f*-nek* ***elsőfajú szakadása*** *van* x_0*-ban, ha megszüntethető vagy ugrás típusú szakadása van* x_0*-ban.*
- *Azt mondjuk, hogy* f*-nek* ***másodfajú szakadása*** *van* x_0*-ban, ha nem elsőfajú szakadása van* x_0*-ban.*

7. feladatsor – elméleti összefoglaló

1. Tétel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

---

2. Definíció. *Legyen $f:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ függvény, és a belső pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Azt mondjuk, hogy f **differenciálható az** a **pontban**, ha*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

*létezik és véges. Ekkor ezt a határértéket az f függvény a **pontbeli deriváltjának** nevezzük, és $f'(a)$-val jelöljük.*

3. Definíció. *Legyen az $f:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban. Ekkor az*

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

*egyenletű egyenest az f függvény a **pontbeli érintőjének** nevezzük*

4. Tétel. (Deriválási szabályok.) *Legyenek $f,g:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ függvények és $\alpha\in\mathbb{R}$. Ha f és g differenciálható az a pontban, akkor αf, $f+g$, $f\cdot g$ és $\frac{f}{g}$ is differenciálható a-ben (utóbbinál azzal a feltételezéssel élve, hogy $g(a)\neq 0$), és ekkor:*

$$\begin{aligned}(\alpha f)'(a)&=\alpha f'(a)\\(f+g)'(a)&=f'(a)+g'(a)\\(f\cdot g)'(a)&=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\\\left(\frac{f}{g}\right)'(a)&=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

Nevezetes deriváltak

$\mathrm{Dom}(f)$	$f(x)$	$f'(x)$	kikötések
$\mathbb{R}$	c	0	$c\in\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$	x^n	nx^{n-1}	$n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$
$\mathbb{R}^+$	x^r	rx^{r-1}	$r\in\mathbb{R}$, $r\neq 0$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	
$\mathbb{R}$	a^x	$a^x\ln(a)$	$a>0$
$\mathbb{R}^+$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
$\mathbb{R}^+$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$a>0$, $a\neq 1$

$\mathrm{Dom}(f)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathrm{ctg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$[-1,1]$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[-1,1]$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

$\mathrm{Dom}(f)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{arsh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$]1,+\infty[$	$\mathrm{arch}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

8. feladatsor – elméleti összefoglaló

1. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és a belső pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Azt mondjuk, hogy f* ***differenciálható az a pontban****, ha*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

létezik és véges. Ekkor ezt a határértéket az f függvény a ***pontbeli deriváltjának*** *nevezzük, és $f'(a)$-val jelöljük.*

2. Tétel. (Deriválási szabályok.) *Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ha f és g differenciálható az a pontban, akkor αf, $f + g$, $f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ is differenciálható a-ben (utóbbinál azzal a feltételezéssel élve, hogy $g(a) \neq 0$), és ekkor:*

$$(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$$
$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Nevezetes deriváltak

$\mathrm{Dom}(f)$	$f(x)$	$f'(x)$	kikötések
$\mathbb{R}$	c	0	$c \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$
$\mathbb{R}^+$	x^r	rx^{r-1}	$r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	
$\mathbb{R}$	a^x	$a^x \ln(a)$	$a > 0$
$\mathbb{R}^+$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
$\mathbb{R}^+$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$a > 0$, $a \neq 1$

$\mathrm{Dom}(f)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathrm{ctg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$[-1, 1]$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$[-1, 1]$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1 + x^2}$

$\mathrm{Dom}(f)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{arsh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
$]1, +\infty[$	$\mathrm{arch}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$