3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2(y+3)}{x^2+y^2} - 5x + 4y & , \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) $\partial_1 f = ?$, $\partial_2 f = ?$

(b) Hol differenciálható az f függvény?

a)

ha $(x,y) \neq (0,0)$

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{2x(y+3)(x^2+y^2) - 2x^3(y+3)}{(x^2+y^2)^2} - 5, \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - 2x^2y(y+3)}{(x^2+y^2)^2} + 4$$

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{3-5x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{x} - 5 \quad \nexists$$

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{4\cancel{y}}{\cancel{y}} = 4$$

b)

- $(0,0)$-ban nem tot.-an diff.-ható az f fv., mert $\partial_1 f(0,0)$ $\nexists$
- az $\underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ nyílt halmazon léteznek a parc. deriváltak és folytonosak $\Rightarrow$ f tot.-an diff.-ható $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-n

5. Tudjuk, hogy minden $x \in]-1,1[$ esetén

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

(a) Írjuk fel az

$$x \mapsto \ln\left(2 + \frac{x^3}{4}\right)$$

hozzárendeléssel értelmezett f függvény $x_0 = 0$ pontbeli Taylor-sorfejtését és adjuk meg a Taylor-sorának konvergenciasugarát.

(b) Az f függvény hatodfokú Taylor-polinomjának segítségével adjuk meg a

$$\int_0^1 \ln\left(2 + \frac{x^3}{4}\right) dx$$

integrál közelítő értékét, valamint f Taylor-sorfejtésének felhasználásával becsüljük meg az elkövetett hibát.

a)

$$f(x) = \ln\left(2 + \frac{x^3}{4}\right) = \ln\left(2\left(1+\frac{x^3}{8}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{x^3}{8}\right) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{3n}}{8^n \cdot n} = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 8^n} x^{3n}$$

ha $\left|\frac{x^3}{8}\right| < 1 \iff |x| < 2 \Rightarrow$ konv. sugár $= 2$

b)

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 T_{0,6}^f(x)\,dx = \int_0^1 \ln(2) + \frac{x^3}{8} - \frac{x^6}{128}\,dx = \ln(2) + \left[\frac{x^4}{32} - \frac{x^7}{7\cdot 128}\right]_{x=0}^{1} = \ln(2) + \frac{1}{32} - \frac{1}{7\cdot 128}$$

$$T_{0,6}^f(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 8^n} x^{3n} = \ln(2) + \frac{x^3}{8} - \frac{x^6}{128}$$

hibabecslés

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 T_{0,6}^f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 8^n} x^{3n}\,dx\right| \leq \int_0^1 \left|\sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 8^n} x^{3n}}_{a_n}\right| dx \leq \int_0^1 \frac{x^9}{3 \cdot 8^3}\,dx = \frac{1}{30 \cdot 8^3}$$

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konv. $\Rightarrow a_n \xrightarrow{(n\to\infty)} 0 \iff |a_n| \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$
- $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{x^{3n+3}}{(n+1)\,8^{n+1}} \cdot \dfrac{8^n \cdot n}{x^{3n}} = x^3 \cdot \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{8} < 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ alternál

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ Leibniz-sor

6.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\arcsin(xy)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^4+2y^2}\right)}_{f(x,y)} = ?$$

Sejtés: 0-hoz tart

Legyen $(x_n,y_n) \xrightarrow{(n\to\infty)} (0,0)$, $(x_n,y_n)\neq(0,0)$ $(n\in\mathbb{N})$

$$f(x_n,y_n) = \underbrace{\arcsin(x_n y_n)}_{\substack{\downarrow (n\to\infty) \\ \arcsin(0)=0}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x_n^4+2y_n^2}\right)}_{\text{korlátos}} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0 \overset{\text{átv.}}{\underset{\text{elv.}}{\Longrightarrow}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Röviden: $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\arcsin(xy)}_{\downarrow\, 0}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x^4+2y^2}\right)}_{\text{kor}} = 0$$

8.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{3xy^3}{4x^2+5y^2}}_{f(x,y)} = ?$$

$f(0,y)=0$

$f(x,0)=0$

$f(x,x) = \frac{3x^4}{9x^2} = \frac{1}{3}x^2 \xrightarrow{(x\to0)} 0$

$f(x,mx) = \ldots$

$f(x,x^2) = \ldots$

1. mo: Polárkoord.: $x_n = r_n\cos(\varphi_n)$ $y_n = r_n\sin(\varphi_n)$ $(n\in\mathbb{N})$ $r_n \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$ $(r_n\neq0)$

$$f(r_n\cos(\varphi_n), r_n\sin(\varphi_n)) = \frac{3r_n^4\cos(\varphi_n)\sin^3(\varphi_n)}{4r_n^2\cos^2(\varphi_n)+5r_n^2\sin^2(\varphi_n)} =$$

$$= \frac{3r_n^{4}\cos(\varphi_n)\sin^3(\varphi_n)}{4r_n^2+r_n^2\sin^2(\varphi_n)} = \underbrace{\frac{3\cos(\varphi_n)\cdot\sin^3(\varphi_n)}{4+\sin^2(\varphi_n)}}_{1\cdot 1\le \frac{3}{4}} \cdot \underbrace{r_n^2}_{\downarrow\, 0} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$$

$4r_n^2(\cos^2(\varphi_n)+\sin^2(\varphi_n)) = 4r_n^2$

$$\overset{\text{átv.}}{\underset{\text{elv.}}{\Longrightarrow}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

2. mo: $(x_n,y_n) \xrightarrow{(n\to\infty)} (0,0)$ $(x_n,y_n)\neq0$

$$|f(x_n,y_n)| = 3|x_n||y_n|\cdot\underbrace{\frac{y_n^2}{4x_n^2+5y_n^2}}_{\le 1} \le 3|x_n|\cdot|y_n| \xrightarrow{(n\to\infty)} 0 \overset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow} f(x_n,y_n) \xrightarrow{(n\to\infty)} 0 \overset{\text{átv}}{\underset{\text{elv.}}{\Longrightarrow}} \lim_{(0,0)} f = 0$$

1. Milyen $x\in\mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi hatványsorok? Adjuk meg az együttható-sorozat konvergenciasugarát is.

(a)
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{(-1)^n}{n\cdot3^n}(x+2)^n$$

(b)
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} (-1)^n\frac{3n-2}{(3n)!}(x-5)^n$$

(c)
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} (-1)^n\frac{(3x-6)^n}{n^34^n}$$

c) $$\sum_{n\in\mathbb{N}^+}(-1)^n\frac{(3x-6)^n}{n^3\cdot4^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}^+}\underbrace{\frac{(-1)^n\cdot3^n}{n^3\cdot4^n}}_{a_n}(x-2)^n$$

$\longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ $x_0=2$ $\xrightarrow{\text{C-H-t}}$ $x\in\left]2-\frac{4}{3}, 2+\frac{4}{3}\right[$ esetén konv.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to1})^3\cdot4} \xrightarrow{(n\to\infty)} \frac{3}{4} \Longrightarrow R_a = \frac{4}{3}$$

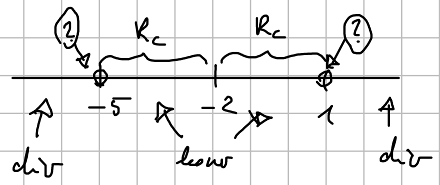
végpontok: $x = 2-\frac{4}{3}$: $\sum_{n\in\mathbb{N}^+}\frac{1}{n^3}$ konv.

$x = 2+\frac{4}{3}$: $\sum_{n\in\mathbb{N}^+}\frac{(-1)^n}{n^3}$ absz. konv. $\Rightarrow$ konv.

$x\in\left[\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right]$ esetén konv.

(a)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n}}_{c_n}(x+2)^n \qquad x_0=-2$$



$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\cdot 3} \xrightarrow{(n\to\infty)} \frac{1}{3} \Rightarrow R_c = 3 \xRightarrow{\text{C.H.-t}} x\in\,]-5,1[\text{ esetén konv.}$$

végpontok: $x=-5$: $\sum_{n\in\mathbb{N}^+}\frac{1}{n}$ divergens

$x=1$: $\sum_{n\in\mathbb{N}^+}\frac{(-1)^n}{n}$ konvergens (Leibniz-krit.)

$\Rightarrow$ a sor konv $\Leftrightarrow x\in\,]-5,1]$

(b)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+}\underbrace{(-1)^n\frac{3n-2}{(3n)!}}_{b_n}(x-5)^n \qquad x_0=5$$

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{3n+1}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{3n-2} = \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n-2)} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0 \xRightarrow{\text{C.-H.-t}} R_b=+\infty \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R} \text{ esetén konv.}$$

1. feladat (14+8=22 pont) $f(x)=\frac{1}{x-3}$; $g(x)=\ln(x-3)$; $x_0=5$

a) Írja fel az f függvény x_0 bázispontú Taylor-sorát, és határozza meg a sor konvergenciatartományát!

b) Írja fel a g függvény x_0 bázispontú Taylor-sorát!

a) $$f(x)=\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-5+2}=\frac12\,\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}=\frac12\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-5}{2}\right)}=\frac12\sum_{n=0}^\infty\left(-\frac{x-5}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-5)^n$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{a_n}(x-5)^n \qquad \sum_{n=0}^\infty q^n=\frac{1}{1-q}, \quad |q|<1$$

$\left|\frac{x-5}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |x-5|<2 \Rightarrow$ konv. tart.: $]3,7[$

b) $g(x)=\ln(x-3)$ $\qquad g'(x)=f(x) \Rightarrow$

$$g(x) \overset{x\in]3,7[}{=} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{(x-5)^{n+1}}{n+1} + C = \ln(2)+\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}(x-5)^n$$

$\ln(2)=g(5)=C$

3. feladat (15+8=23 pont) *a)* Adja meg az $f(x,y)=e^{3x-y^2}-3xy^2$ függvény érintősíkját a $P(3,3)$ pontban!

b) Határozza meg a függvény iránymenti deriváltját a P pontban az $(1,2)$ iránnyal párhuzamosan!

a) $\partial_1 f(x,y)=3\cdot e^{3x-y^2}-3y^2$ $\qquad \partial_2 f(x,y)=-2y\cdot e^{3x-y^2}-6xy$ $\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

érintősík egy normálvektora: $(\partial_1 f(3,3),\partial_2 f(3,3),-1)$ $\qquad$ egy pontja: $(3,3,f(3,3))$

$f(3,3)=1-81=-80$

$\partial_1 f(3,3)=3-27=-24$

$\partial_2 f(3,3)=-6-54=-60$

érintősík egyenlete: $-24(x-3)-60(y-3)-(z+80)=0$

n.v. (A,B,C), pont (x_0,y_0,z_0) $\Rightarrow$ sík: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$$\left(\lim_{t\to0+}\frac{f(a+te)-f(a)}{t} =: D_e f(a)\right)$$

b) $\|(1,2)\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt5 \Rightarrow \underline{e}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\partial_1 f,\partial_2 f$ folyt $\mathbb{R}^2$-en $\Rightarrow f$ tot. diff.-ható $\mathbb{R}^2$-en (spec P-ben is)

$$\Rightarrow D_{\underline{e}} f(P)=\langle \operatorname{grad} f(P), \underline{e}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-24\\-60\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt5}(-24-120)=\frac{-144}{\sqrt5}$$