

* 1. feladat (10 pont)

Számítsuk ki az $\int_H f$ integrál értékét, ahol H a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ csúspontok által meghatározott háromszög, és

$$f(x, y) := y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Mo.

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x\},$$

tehát normáltartományon integrálunk (2p):

$$\int_H f \stackrel{(2p)}{=} \int_0^1 \int_0^{2-2x} y \, dy \, dx \stackrel{(2p)}{=} \int_0^1 \frac{(2-2x)^2}{2} \, dx \stackrel{(2p)}{=} \left[\frac{(2-2x)^3}{-12} \right]_{x=0}^1 \stackrel{(2p)}{=} \frac{2}{3}.$$

* 2. feladat (14 pont)

Integráljuk az $f(x, y, z) := \frac{y}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, z \in \mathbb{R})$ függvényt a

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

halmazon.

Mo. Gömbi koordinátákkal (2p) ($H = \underline{S}([1, 3] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}])$):

$$\begin{aligned} \int_H f &\stackrel{(2p)}{=} \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\varphi \, d\theta \, dr \stackrel{(3p)}{=} \\ &= \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin(\varphi) \sin(\theta)}{r^2 \sin^2(\theta)} \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\varphi \, d\theta \, dr \stackrel{(1p)}{=} \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin(\varphi) \, d\varphi \, d\theta \, dr \stackrel{(3p)}{=} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^3 r \, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) \, d\varphi \stackrel{(2p)}{=} \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=1}^3 \cdot [-\cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \stackrel{(1p)}{=} 4\pi \end{aligned}$$

* 3. feladat (10 pont)

Legyen f abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki $\mathcal{F}(x \mapsto f(3x + 1))$ -et f Fourier-transzformáltja segítségével.

Mo. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $g(x) := f(3x + 1)$. Ekkor minden $\omega \in \mathbb{R}$ -re:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(\omega) &\stackrel{(2p)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(3x + 1) \, dx \stackrel{(3p)}{=} \int_{t=3x+1}^{+\infty} e^{-i\omega \frac{t-1}{3}} f(t) \frac{1}{3} \, dt \stackrel{(3p)}{=} \\ &= \frac{1}{3} e^{\frac{i\omega}{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\omega}{3} t} f(t) \, dt \stackrel{(2p)}{=} \frac{1}{3} e^{\frac{i\omega}{3}} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{3}\right). \end{aligned}$$

4. feladat (6+6=12 pont)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{sh}(x^2)} = ?$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)e^x}{x \cos(2x) \ln(2 + x^2)} = ?$

Mo. a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{sh}(x^2)} \stackrel{(2p)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2x \operatorname{ch}(x^2)} \stackrel{(1p)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2 \operatorname{ch}(x^2)} \stackrel{(2p)}{=} 0,$$

ahol a (*) egyenlőségnél egy " $\frac{0}{0}$ " alakú határértékre alkalmaztuk a L'Hospital-szabályt (1p).

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)e^x}{x \cos(2x) \ln(2+x^2)} \stackrel{(3p)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \frac{xe^x}{\cos(2x) \ln(2+x^2)} \stackrel{(3p)}{=} 1 \cdot \frac{0}{1 \cdot \ln(2)} = 0$$

5. feladat (6+4=10 pont)

a) $\int \frac{2}{x^2+3} dx = ?$

b) $\int \frac{2x}{x^2+3} dx = ?$

Mo. a)

$$\int \frac{2}{x^2+3} dx \stackrel{(3p)}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \stackrel{(3p)}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

b)

$$\int \frac{2x}{x^2+3} dx \stackrel{(4p)}{=} \ln(x^2+3) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

6. feladat (10+4=14 pont)

Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A b) részben adjuk meg a megfelelő hatványfüggvény-sor összegfüggvényét is.

a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt{n+1}}{2^n} (x+1)^n$

b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(x+1)^n}{n!}$

Mo. a) Legyen $a_n := \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$), ekkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \stackrel{(2p)}{=} \frac{\sqrt{n+2}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}} \stackrel{(2p)}{=} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \quad (2p),$$

azaz a sor konvergenciasugara 2 (1p), a végpontokban pedig divergens (2p), tehát a konvergen-
ciataromány $] -3, 1[$ (1p).

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (2p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!} \stackrel{(2p)}{=} e^{x+1}.$$

7. feladat (16 pont)

Adjuk meg az

$$y'' + 4y' + 4y = 20x$$

differentiálegyenlet általános megoldását.

Mo. Másodrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad (2p),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = -2$, **(1p)**. Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,a}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (2p).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük az $y(x) = Ax + B$ alakban **(3p)** ($x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$) (nincs rezonancia). Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $y'(x) = A$ és $y''(x) = 0$ **(1p)**. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$4A + 4Ax + 4B = 20x \quad (1p) \implies A = 5, \quad B = -5 \quad (2p),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = 5x - 5 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (2p).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,a}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,a}(x) = \\ &= 5x - 5 + C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (2p). \end{aligned}$$

8. feladat (14 pont)

Mi a kapcsolat számsorozatok konvergenciája és korlátossága között? (Azaz: igaz-e, hogy minden korlátos számsorozat konvergens, illetve, hogy minden konvergens számsorozat korlátos). Amelyik következtetés igaz, azt bizonyítsuk be, amelyik hamis, arra adjunk ellenpéldát.

Mo. Minden konvergens sorozat korlátos **(2p)**.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám **(1p)**. $\varepsilon := 1$ -hez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$A - 1 \leq a_n \leq A + 1 \quad (4p).$$

Legyen $K_1 := \min\{a_0, a_1, \dots, a_N, A - 1\}$ és $K_1 := \max\{a_0, a_1, \dots, a_N, A + 1\}$ **(3p)**, ekkor K_1 alsó, K_2 pedig felső korlátja az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatnak **(2p)**. $\square$

Létezik olyan korlátos sorozat, amelyik nem konvergens, például: $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat ilyen **(2p)**.
