

* 1. feladat (10 pont)

Számítsuk ki az $\int_H f$ integrál értékét, ahol H a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ csúcspontok által meghatározott háromszög, és

$$f(x, y) := x^2 y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Mo.

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x\},$$

tehát normáltartományon integrálunk (2p):

$$\begin{aligned} \int_H f &\stackrel{(2p)}{=} \int_0^1 \int_0^{2-2x} x^2 y \, dy \, dx \stackrel{(2p)}{=} \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{y=0}^{2-2x} dx \stackrel{(1p)}{=} \int_0^1 2x^2 (1-x)^2 \, dx \stackrel{(1p)}{=} \\ &= \int_0^1 2x^2 - 4x^3 + 2x^4 \, dx \stackrel{(1p)}{=} \left[\frac{2}{3} x^3 - x^4 + \frac{2}{5} x^5 \right]_{x=0}^1 \stackrel{(1p)}{=} \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

* 2. feladat (14 pont)

Integráljuk az $f(x, y, z) := z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$ függvényt a

$$H := \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$$

halmazon.

Mo. Hengerkoordinátákkal (2p) ($H = \underline{C}([1, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, 3])$):

$$\begin{aligned} \int_H f &\stackrel{(2p)}{=} \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) r \, dz \, d\varphi \, dr \stackrel{(3p)}{=} \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 z r^2 \, dz \, d\varphi \, dr \stackrel{(3p)}{=} 2\pi \left(\int_1^2 r^2 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^3 z \, dz \right) \stackrel{(2p)}{=} \\ &= 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=1}^2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^3 \stackrel{(2p)}{=} 21\pi. \end{aligned}$$

* 3. feladat (4+6=10 pont)

Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) := \begin{cases} (x + \frac{\pi}{2})^2, & \text{ha } x \in [-\pi, 0[\\ x, & \text{ha } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

a) Mondjuk ki a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájáról szóló Dirichlet-tételt.

b) Jelölje Φ az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét. Számítsuk ki a $\Phi(0)$ és $\Phi(-\frac{\pi}{2})$ értékeket, és rajzoljuk fel Φ grafikonját.

Mo. a) Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, és tegyük fel, hogy $[-\pi, \pi]$ felbontható úgy véges sok részintervallumra, hogy ezek belsején f monoton és korlátos. Ekkor f Fourier-sora minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, és

$$(\Phi(f))(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad (4p).$$

b) Az f függvényre teljesülnek a Dirichlet-tétel feltételei **(1p)**

$$\Phi(0) = \frac{0 + \frac{\pi^2}{4}}{2} \stackrel{(1p)}{=} \frac{\pi^2}{8}, \quad \Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{(1p)}{=} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

+ rajz **(3p)**.

4. feladat (6+6=12 pont)

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{2n} + 2^{n+1} + 7 \cdot 3^n} = ? \qquad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n^2}{1+n^2} \right)^{2n^2} = ?$$

Mo. a)

$$4 = \sqrt[n]{4^n} \stackrel{(2p)}{\leq} \sqrt[n]{2^{2n} + 2^{n+1} + 7 \cdot 3^n} \stackrel{(2p)}{\leq} \sqrt[n]{10 \cdot 4^n} = 4 \cdot \sqrt[n]{10} \xrightarrow[n]{(1p)} 4,$$

tehát a rendőrelv alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{2n} + 2^{n+1} + 7 \cdot 3^n} = 4$ **(1p)**.

b)

$$\left(\frac{2+n^2}{1+n^2} \right)^{2n^2} \stackrel{(3p)}{=} \left(\frac{\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \right)^2 \xrightarrow[n]{(3p)} \left(\frac{e^2}{e} \right)^2 = e^2,$$

hiszen a fenti sorozatok az $\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}^+}$ és $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}^+}$ részsorozatai.

5. feladat (5+5=10 pont)

$$a) \int x^3 \ln(x) \, dx = ? \qquad b) \int \operatorname{tg}(x) \, dx = ?$$

Mo. a) Parciális integrálással **(1p)** :

$$\int x^3 \ln(x) \, dx \stackrel{(2p)}{=} \frac{x^4}{4} \ln(x) - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx \stackrel{(2p)}{=} \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{x^4}{16} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

b)

$$\int \operatorname{tg}(x) \, dx \stackrel{(2p)}{=} - \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx \stackrel{(3p)}{=} - \ln |\cos(x)| + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

6. feladat (14 pont)

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{e^{-2y^2} \operatorname{ch}(2x)}{y}$$

Mo. a) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-2y^2} \operatorname{ch}(2x)}{y} \implies \int y e^{2y^2} dy = \int \operatorname{ch}(2x) dx \quad (2p).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int y e^{2y^2} dy = \frac{1}{4} e^{2y^2} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (5p).$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \operatorname{ch}(2x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2x) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (5p).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\frac{1}{2} e^{2y^2(x)} = \operatorname{sh}(2x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (2p).$$

7. feladat (16 pont)

Legyen

$$f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát.

Mo. Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x, y) = 3x^2 - 3y \quad (1p) \quad \partial_2 f(x, y) = 3y^2 - 3x \quad (1p)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{array} \right\} \quad (2p) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\} \quad (2p),$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti két pontban lehet lokális szélsőértéke **(1p)**. Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \quad (2p),$$

tehát

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \quad (2p),$$

azaz $H_f(0, 0)$ indefinit, $H_f(1, 1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(3p)**, következésképpen az origóban nincs lokális szélsőértéke f -nek, és az $(1, 1)$ pontban pedig lokális minimuma van **(2p)**.

8. feladat (4+10=14 pont)

Mondjuk ki és bizonyítsuk a numerikus sorokra vonatkozó majoráns kritériumot.

Mo. *Tétel:* Legyenek $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan számsorozatok, amelyekhez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad (2p),$$

valamint a $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ sor konvergens **(1p)**. Ekkor a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor is konvergens **(1p)**.

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$. A $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ sor konvergenciája és a sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium

(1p) alapján létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ és $n > m \geq N_1$ esetén $\left| \sum_{k=m+1}^n b_k \right| < \varepsilon$

(2p) . Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ és $n > m \geq \max\{N, N_1\}$ (2p) . Ekkor

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| = \sum_{k=m+1}^n a_k \leq \sum_{k=m+1}^n b_k = \left| \sum_{k=m+1}^n b_k \right| < \varepsilon \quad (4p),$$

tehát (ismét a sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium miatt) a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor konvergens (1p) .

(Alternatív bizonyítás: a részletösszeg-sorozatról megmutatható, hogy felülről korlátos és egy küszöbindextől kezdve monoton. A felső korláttal vigyázni kell, mert mivel a majorálás csak egy küszöbindextől kezdve teljesül, ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorösszeg nem jó felső korlátnak.)
