

**\* 1. feladat (10 pont)**

Számítsuk ki az  $\int_H f$  integrál értékét, ahol  $H$  a  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  csúcspontok által meghatározott háromszög, és

$$f(x, y) := x^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Mo.

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\},$$

tehát normáltartományon integrálunk **(2p)**:

$$\int_H f \stackrel{(2p)}{=} \int_0^2 \int_0^{2-x} x^2 dy dx \stackrel{(2p)}{=} \int_0^2 2x^2 - x^3 dx \stackrel{(2p)}{=} \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^2 \stackrel{(2p)}{=} \frac{4}{3}.$$

**\* 2. feladat (14 pont)**

Integráljuk az  $f(x, y, z) := \frac{x}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, z \in \mathbb{R})$  függvényt a

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\}$$

halmazon.

Mo. Gömbi koordinátákkal **(2p)** ( $H = \underline{S}([1, 2] \times [\frac{\pi}{2}, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}])$ ):

$$\begin{aligned} \int_H f &\stackrel{(2p)}{=} \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta dr \stackrel{(3p)}{=} \\ &= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos(\varphi) \sin(\theta)}{r^2 \sin^2(\theta)} \cdot r^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta dr \stackrel{(1p)}{=} \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos(\varphi) d\varphi d\theta dr \stackrel{(3p)}{=} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^2 r dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) d\varphi \stackrel{(2p)}{=} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=1}^2 \cdot [\sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \stackrel{(1p)}{=} \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

**\* 3. feladat (10 pont)**

Legyen  $f$  abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki  $\mathcal{F}(x \mapsto f(2x - 1))$ -et  $f$  Fourier-transzformáltja segítségével.

Mo. Minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén legyen  $g(x) := f(2x - 1)$ . Ekkor minden  $\omega \in \mathbb{R}$ -re:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(\omega) &\stackrel{(2p)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(2x - 1) dx \stackrel{(3p)}{=} \int_{t=2x-1}^{+\infty} e^{-i\omega \frac{t+1}{2}} f(t) \frac{1}{2} dt \stackrel{(3p)}{=} \\ &= \frac{1}{2} e^{-i\frac{\omega}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\omega}{2} t} f(t) dt \stackrel{(2p)}{=} \frac{1}{2} e^{-i\frac{\omega}{2}} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

**4. feladat (10+8=18 pont)**

Milyen  $x \in \mathbb{R}$  esetén konvergensek az alábbi sorok? A b) részben adjuk meg a megfelelő hatványfüggvény sor összegfüggvényét is.

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n} (x-1)^n \qquad b) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(x-1)^n}{3^n n!}$$

Mo. a) Legyen  $a_n := \frac{\sqrt{n+1}}{3^n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), ekkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \stackrel{(2p)}{=} \frac{\sqrt{n+2}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{\sqrt{n+1}} \stackrel{(2p)}{=} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \cdot \frac{1}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \quad (2p),$$

azaz a sor konvergenciasugara 3 (1p), a végpontokban pedig divergens (2p), tehát a konvergenz tartomány  $] -2, 4[$  (1p).

b) Minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén (2p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n n!} \stackrel{(2p)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x-1}{3}\right)^n}{n!} \stackrel{(4p)}{=} e^{\frac{x-1}{3}}.$$

**5. feladat (16 pont)**

Adjuk meg az

$$y'' + 4y' + 4y = 20x$$

differentiálegyenlet általános megoldását.

Mo. Másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad (2p),$$

gyökei:  $\lambda_{1,2} = -2$ , (1p). Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,a}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (2p).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük az  $y(x) = Ax + B$  alakban (3p) ( $x \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$ ) (nincs rezonancia). Minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $y'(x) = A$  és  $y''(x) = 0$  (1p). Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$4A + 4Ax + 4B = 20x \quad (1p) \implies A = 5, \quad B = -5 \quad (2p),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = 5x - 5 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (2p).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{i,a}(x) = y_{i,p}(x) + y_{h,a}(x) = 5x - 5 + C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (2p).$$

**6. feladat (8+10=18 pont)**

Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y}{2x^4 + 3y^4} & , \text{ ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Folytonos-e  $f$  az origóban?

b) A sík mely pontjaiban differenciálható az  $f$  függvény?

Mo. a)

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{5} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \neq 0 = f(0, 0) \quad (6p),$$

tehát az átviteli elv alapján **(1p)**  $f$  nem folytonos az origóban **(1p)**.

b) Minden  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  esetén **(1p)**

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{3x^2y(2x^4 + 3y^4) - x^3y \cdot 8x^3}{(2x^4 + 3y^4)^2} \quad (2p)$$

$$\partial_2 f(x, y) = \frac{x^3(2x^4 + 3y^4) - x^3y \cdot 12y^3}{(2x^4 + 3y^4)^2} \quad (2p).$$

$f$  nem differenciálható az origóban, mert ott nem folytonos **(2p)**. Az  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  halmazon  $f$  differenciálható, mert a fentiek alapján ezen a nyílt halmazon  $f$  parciális deriváltjai folytonosak **(3p)**.

**7. feladat (4+10=14 pont)**

a) Pontosan milyen  $\alpha \in \mathbb{R}$  esetén konvergens a  $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$  sor?

b) Bizonyítsuk az a) pontban megfogalmazott állítást  $\alpha \neq 1$  esetén.

Mo. a) A  $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$  numerikus sor pontosan akkor konvergens, ha  $\alpha > 1$ . **(4p)**

b) Ha  $\alpha \leq 0$ , akkor az  $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat nem tart 0-hoz, tehát  $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$  divergens. **(2p)**

Ha  $0 < \alpha \neq 1$ , akkor

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx &\stackrel{(1p)}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx \stackrel{(1p)}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{x=1}^b \stackrel{(1p)}{=} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \stackrel{(2p)}{=} \begin{cases} +\infty, & \text{ha } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{ha } \alpha > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

tehát az integrálkritérium alapján **(2p)**  $\alpha > 1$  esetén  $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$  konvergens,  $0 < \alpha < 1$  esetén pedig divergens **(1p)**.

**IMSc feladat (14 IMSc pont)** Bizonyítsuk be, hogy ha  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  folytonos függvény és  $a < b$  valós számok, akkor

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$