

* 1. feladat (10 pont)

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} dx dy = ?$$

Mo.

$$H := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \right\} \stackrel{(2p)}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x \right\}$$

H normáltartomány (1p), tehát

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} dx dy &\stackrel{(2p)}{=} \int_H e^{x^2} d(x, y) \stackrel{(2p)}{=} \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} dy dx \stackrel{(1p)}{=} \int_0^1 2xe^{x^2} dx \stackrel{(1p)}{=} \\ &= \left[e^{x^2} \right]_{x=0}^1 \stackrel{(1p)}{=} e - 1. \end{aligned}$$

* 2. feladat (14 pont)

Integráljuk az $f(x, y) := \frac{1}{x^2+y^2}$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ függvényt a

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$$

halmazon.

Mo. Síkbeli polárkoordinátákkal (2p) ($H = \underline{P}([1, 2] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}])$):

$$\int_H f \stackrel{(2p)}{=} \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r d\varphi dr \stackrel{(4p)}{=} \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r} d\varphi dr \stackrel{(3p)}{=} \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{1}{r} dr \stackrel{(2p)}{=} \frac{\pi}{4} [\ln |r|]_{r=1}^2 \stackrel{(1p)}{=} \frac{\pi \ln(2)}{4}$$

* 3. feladat (4+6=10 pont)

Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) := \begin{cases} (x - \pi)^2 & , \text{ ha } x \in [-\pi, 0[\\ x & , \text{ ha } x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

a) Mondjuk ki a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájáról szóló Dirichlet-tételt.

b) Jelölje Φ az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét. Rajzoljuk fel Φ grafikonját. Egyenletesen konvergens-e f Fourier-sora $\mathbb{R}$ -en?

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, és tegyük fel, hogy $[-\pi, \pi]$ felbontható úgy véges sok részintervallumra, hogy ezek belsején f monoton és korlátos. Ekkor f Fourier-sora minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, és

$$(\Phi(f))(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad (4p).$$

b) Az f függvényre teljesülnek a Dirichlet-tétel feltételei (1p) + rajz (2p)

f Fourier-sorának minden tagja folytonos függvény, tehát ha egyenletesen konvergens lenne, akkor az összegfüggvény is folytonos lenne (2p), ez azonban nem teljesül, tehát a Fourier-sor nem egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$ -en (1p).

4. feladat (7+9=16 pont)

Konvergens-e az alábbi sorok? Amennyiben igen, adjuk meg a megfelelő sor összegét is.

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{n^2} \qquad b) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{n+1}}{3^n n!}$$

Mo. a) Legyen $a_n := \left(\frac{n+2}{n} \right)^{n^2}$ ($n \in \mathbb{N}$), ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} \stackrel{(2p)}{=} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^2 > 1 \quad (3p),$$

tehát a gyökkritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor divergens **(2p)**.

b) Nevezetes sorösszegekről van szó:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n n!} \stackrel{(4p)}{=} 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n!} \stackrel{(4p)}{=} 2 \cdot e^{\frac{2}{3}},$$

amiből a konvergencia is adódik **(1p)**.

5. feladat (20 pont)

Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' + 2x \sin(x^2)y = 3x^2 e^{\cos(x^2)}, \quad y(0) = 2e$$

Mo. Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' + 2x \sin(x^2)y = 0 \implies y_{h,\dot{a}}(x) = C e^{\cos(x^2)} \quad (C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}) \quad (8p).$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)

Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)e^{\cos(x^2)}$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)**.

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)e^{\cos(x^2)} - 2c(x)x \sin(x^2)e^{\cos(x^2)}}_{y'(x)} + \underbrace{2x \sin(x^2)c(x)e^{\cos(x^2)}}_{2x \sin(x^2)y(x)} = 3x^2 e^{\cos(x^2)} \quad (2p).$$

Ebből pedig $c'(x) = 3x^2$.

$$\int 3x^2 dx = x^3 + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (2p),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := x^3$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)e^{\cos(x^2)} = x^3 e^{\cos(x^2)} \quad (1p).$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,\dot{a}}(x) \stackrel{(2p)}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,\dot{a}}(x) \stackrel{(1p)}{=} x^3 e^{\cos(x^2)} + C e^{\cos(x^2)} \quad (C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

Jelölje $\tilde{y}$ a kezdeti feltételt kielégítő megoldást. $\tilde{y}(0) = 2e \implies C = 2$ **(2p)**, azaz

$$\tilde{y}(x) = x^3 e^{\cos(x^2)} + 2e^{\cos(x^2)} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (1p).$$

6. feladat (12+4=16 pont)

Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{ ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Folytonos-e az f függvény?
b) Differenciálható-e f az origóban?

Mo. a) Az f függvény folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ halmaz minden pontjában **(2p)**, tehát a kérdés megválaszolásához elég az origóbeli folytonosságot vizsgálnunk. $(\frac{1}{k}, 0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, 0)$ **(2p)**, és

$$f\left(\frac{1}{k}, 0\right) \stackrel{(3p)}{=} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k^2}}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \text{ (1p)}} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\frac{1}{k^2}}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \neq 0 = f(0, 0) \quad (1p),$$

tehát az átviteli elv alapján f nem folytonos az origóban **(1p)**, következésképpen nem folytonos **(1p)**.

- b) Az előző pont alapján f nem folytonos az origóban, így ott nem is differenciálható **(4p)**.

7. feladat (4+10=14 pont)

- a) Milyen elégséges feltételt tanultunk arra, hogy egy függvény egy adott intervallumon megegyezzen a Taylor-sorának összegfüggvényével?
b) Bizonyítsuk be az a) pontbeli állítást.

Mo. a) Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, és tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény végtelenszer differenciálható az $]x_0 - r, x_0 + r[$ intervallumon **(1p)**, valamint az $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytartomány egyenletesen korlátos az $]x_0 - r, x_0 + r[$ intervallumon **(2p)**. Ekkor minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ esetén

$$f(x) = T_{x_0}^f(x) \quad (1p).$$

- b) Legyen $K \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f^{(n)}(x)| \leq K \quad (2p).$$

Legyen továbbá $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ **(1p)**, ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén a Taylor-formula alapján **(1p)** létezik olyan $\xi \in]x_0 - r, x_0 + r[$, amelyre $f(x) - T_{n, x_0}^f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ **(3p)**, következésképpen

$$\left| f(x) - T_{n, x_0}^f(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!} r^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3p).$$