

1. feladat (10+10=20 pont)

Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A b) részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is!

$$a) \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{(x+1)^k}{k \cdot 2^k} \qquad b) \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$

Mo. a) Minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_k := \frac{1}{k \cdot 2^k}$. Ekkor

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2 \sqrt[k]{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \quad (3p),$$

tehát $R_a = 2$ (1p), azaz minden $x \in]-3, 1[$ esetén konvergens a sor (2p).

Vizsgáljuk meg az intervallum végpontjait:

- $x = -3$ esetén a $\sum_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{(-1)^k}{k}$ sor a Leibniz-kritérium alapján konvergens (2p),
- $x = 1$ esetén pedig a $\sum_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{k}$ sor divergens (1p),

tehát összegezve: a sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in [-3, 1[$ (1p).

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (2p)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = e^{-x^2} \quad (8p).$$

(Ha a hallgató nem jön rá, hogy ez egy nevezetes hatványsor, akkor a konvergenciatartomány helyes meghatározásáért legfeljebb 5 pont jár.)

2. feladat (20 pont)

Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését, Taylor-sorának konvergenciasugarát és az $f^{(99)}(0)$ deriváltat!

$$f(x) := \frac{x^3}{4 - x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\})$$

Mo.

$$\frac{x^3}{4 - x^2} \stackrel{(3p)}{=} \frac{x^3}{4} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}} \stackrel{(3p)}{=} \frac{x^3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k \stackrel{(2p)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1}} x^{2k+3},$$

ahol a (*) egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|x| < 2$ (3p), tehát a Taylor-sor konvergenciasugara 2 (3p).

Jelölje $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a Taylor-sor együttható-sorozatát. Ekkor

$$f^{(99)}(0) \stackrel{(2p)}{=} a_{99} \cdot 99! \stackrel{(4p)}{=} \frac{99!}{44^{49}}$$

3. feladat (16 pont)

Határozzuk meg az alábbi határértéket (amennyiben létezik)!

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = ?$$

Mo. Legyen

$$f(x, y) := \frac{2x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Első megoldás. Tegyük fel, hogy $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ -ban haladó sorozat, amelyre $(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, 0)$ **(2p)**. Legyen $(r_k \cos(\varphi_k), r_k \sin(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ az előbbi sorozat polárkoordinátás alakja **(2p)**. Ekkor

$$\begin{aligned} f(x_k, y_k) &= f(r_k \cos(\varphi_k), r_k \sin(\varphi_k)) \stackrel{(4p)}{=} \frac{r_k^2 (2 \cos^2(\varphi_k) + \cos(\varphi_k) \sin(\varphi_k))}{r_k} \stackrel{(2p)}{=} \\ &= \underbrace{r_k}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \underbrace{(2 \cos^2(\varphi_k) + \cos(\varphi_k) \sin(\varphi_k))}_{\text{korlátos}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ **(2p)**. (Akkor is adható maximális pont, ha a megoldásban nem szerepel az átviteli elv.)

Második megoldás. Tegyük fel, hogy $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ -ban haladó sorozat, amelyre $(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, 0)$ **(2p)**. Ekkor

$$|f(x_k, y_k)| \stackrel{(6p)}{\leq} |x_k| \frac{2|x_k| + |y_k|}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \stackrel{(2p)}{=} |x_k| \left(2\sqrt{\frac{x_k^2}{x_k^2 + y_k^2}} + \sqrt{\frac{y_k^2}{x_k^2 + y_k^2}} \right) \stackrel{(4p)}{\leq} 3|x_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ **(2p)**. (Akkor is adható maximális pont, ha a megoldásban nem szerepel az átviteli elv.)

4. feladat (8+6+10+4=28 pont)

Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{3xy}{x^2 + 2y^2} & , \text{ ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Mikor mondjuk, hogy egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény totálisan differenciálható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban? (Írjuk le a definíciót.) Adjunk elégséges feltételt pontbeli differenciálhatóságra!
- Folytonos-e az f függvény? (Indokoljunk!)
- Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait!
- A sík mely pontjaiban differenciálható f ? (Indokoljunk!)

Mo. a) *Definíció:* Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható $\underline{a}$ -ban, ha $\underline{a}$ belső pontja $\text{Dom}(f)$ -nek **(2p)**, és létezik olyan $\underline{A} \in \mathbb{R}^n$, amelyre teljesül, hogy

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \underline{A}, \underline{x} - \underline{a} \rangle}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0 \quad \textbf{(3p)}.$$

(A jegyzetben szereplő definíció is maximális pontot ér.)

Elégséges feltétel pontbeli differenciálhatóságra: Ha $\underline{a} \in \bigcap_{i=1}^n \text{int}(\text{Dom}(\partial_i f))$, és f minden parciális deriváltfüggvénye folytonos $\underline{a}$ -ban (vagy gyengébb feltétel: $\underline{a}$ egy környezetén), akkor f (totálisan) differenciálható $\underline{a}$ -ban **(3p)**.

b) $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, 0)$ és $f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = 1 \not\rightarrow 0 = f(0, 0)$ **(5p)**, tehát az átviteli elv miatt f nem folytonos az origóban **(1p)**.

c) Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ **(1p)**, akkor

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{3y(x^2 + 2y^2) - 6x^2 y}{(x^2 + 2y^2)^2} \quad (2p) \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{3x(x^2 + 2y^2) - 12xy^2}{(x^2 + 2y^2)^2} \quad (2p)$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni **(1p)**:

$$\partial_1 f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \quad (2p) \quad \partial_2 f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0 \quad (2p).$$

d) Az origóban nem differenciálható f , mert ott nem folytonos **(2p)**, a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (nyílt) halmazon **(2p)**.

5. feladat (16 pont)

Legyen

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + xy - 3x \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát!

Mo. Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x, y) = 2x + y - 3 \quad (2p) \quad \partial_2 f(x, y) = 2y + x \quad (2p)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - 3 = 0 \\ 2y + x = 0 \end{array} \right\} \quad (2p) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (2, -1) \quad (2p),$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a $(2, -1)$ pontban lehet lokális szélsőértéke **(1p)**. Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3p),$$

tehát $H_f(2, -1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(2p)**, következésképpen f -nek lokális minimuma van a $(2, -1)$ pontban **(2p)**.

IMSc feladat (8 IMSc pont) Határozzuk meg az arcsin függvény 0 középpontú Taylor-sorfejtését!

Mo. Minden $x \in]-1, 1[$ esetén $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **(3p)**, továbbá a binomiális sorfejtés alkalmazásával

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k} \quad (5p).$$

Ebből pedig minden $x \in]-1, 1[$ esetén a hatványsorok tulajdonságai alapján **(2p)**

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \int_0^x \arcsin'(t) dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^{2k} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (5p). \end{aligned}$$