

1. feladat (12+10=22 pont)

Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az alábbi sor? Adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is!

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}} nx^n \qquad b) \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!}$$

Mo. a) Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ **(1p)**, ezért az együttható-sorozat konvergenciasugara 1 **(1p)**, továbbá $x = \pm 1$ esetén divergens a sor **(2p)**, tehát pontosan akkor konvergens, ha $x \in]-1, 1[$ **(1p)**.

Minden $x \in]-1, 1[$ esetén legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \qquad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \qquad G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Ekkor $G' = g$ **(3p)**, és minden $x \in]-1, 1[$ esetén

$$G(x) = \frac{1}{1-x} \implies g(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \textbf{(2p)},$$

tehát $f(x) = xg(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ **(2p)**.

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén **(2p)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!} \stackrel{\textbf{(3p)}}{=} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \stackrel{\textbf{(5p)}}{=} x^2 \operatorname{sh}(x).$$

2. feladat (18 pont)

Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését, Taylor-sorának konvergenciasugarát és az $f^{(100)}(0)$ deriváltat!

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Mo.

$$\frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \stackrel{\textbf{(3p)}}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{\textbf{(3p)}}{\underset{(*)}{=}} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k \stackrel{\textbf{(2p)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k},$$

ahol a $(*)$ egyenlőség $|x| < 2$ esetén teljesül a binomiális sorfejtés alapján **(2p)**, tehát a Taylor-sor konvergenciasugara 2 **(2p)**.

Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_{2k} := \frac{1}{2 \cdot 4^k} \binom{-\frac{1}{2}}{k}$ **(2p)**. Ekkor (az előadáson tanultak alapján)

$$f^{(100)}(0) = a_{100} \cdot 100! = \frac{1}{2 \cdot 4^{50}} \binom{-\frac{1}{2}}{50} \cdot 100! \quad \textbf{(4p)}.$$

3. feladat (6+10=16 pont)

Legyen

$$f(x, y) := \ln(1 + x^2 y^4) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + 2y^6}\right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}).$$

a) Mit mond ki a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények esetén)

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = ?$

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, $\underline{a} \in \text{Dom}(f)'$ **(2p)** és $b \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = b \iff \begin{array}{l} \underline{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \underline{a} \Rightarrow f(\underline{x}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \\ \forall (\underline{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ sorozatra, amely } \text{Dom}(f) \setminus \{\underline{a}\} \text{-ban halad.} \end{array} \quad \textbf{(4p)}$$

b) Tegyük fel, hogy $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ -ban haladó sorozat, amelyre $(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0,0)$ **(2p)**. Ekkor

$$f(x_k, y_k) \stackrel{\textbf{(4p)}}{=} \underbrace{\ln(1 + x_k^2 y_k^4)}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x_k^2 + 2y_k^6}\right)}_{\text{korlátos}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \textbf{(2p)}$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ **(2p)**. (Akkor is adható maximális pont, ha a megoldásban nem szerepel az átviteli elv.)

4. feladat (10+4=14 pont)

Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3 + 4y^3}{3x^4 + 2y^2} & , \text{ ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Határozzuk meg f parciális deriváltjait $\mathbb{R}^2$ minden pontjában!

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f ?

Mo. a) Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)**, akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{3x^2(3x^4 + 2y^2) - (x^3 + 4y^3)12x^3}{(3x^4 + 2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{12y^2(3x^4 + 2y^2) - (x^3 + 4y^3)4y}{(3x^4 + 2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}.$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni **(1p)**:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{3x^5} = +\infty,$$

azaz $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(2p)**,

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y^3}{2y^3} = 2 \quad \textbf{(2p)}.$$

b) Az origóban nem differenciálható f , mert nem létezik az origóbeli első változó szerinti parciális deriváltja **(2p)**, a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (nyílt) halmazon **(2p)**.

5. feladat (18+6+6=30 pont)

Legyen

$$f(x, y) := x^4 + y^4 - 4xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

- a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát!
- b) Számítsuk ki az f függvény $(-1, 1)$ pontbeli $\underline{v} := \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ irány menti deriváltját!
- c) Határozzuk meg az f függvény $(-1, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!
-

Mo. a) Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x, y) = 4x^3 - 4y \quad (1\text{p}) \quad \partial_2 f(x, y) = 4y^3 - 4x \quad (1\text{p})$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{array} \right\} \quad (2\text{p}) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)\} \quad (3\text{p}),$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti három pontban lehet lokális szélsőértéke **(1p)**. Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad (2\text{p}),$$

tehát

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = H_f(-1, -1) \quad (3\text{p}),$$

azaz $H_f(0, 0)$ indefinit, $H_f(1, 1) = H_f(-1, -1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(3p)**, következésképpen az origóban nincs lokális szélsőértéke f -nek, és az $(1, 1)$ és $(-1, -1)$ pontokban pedig lokális minimuma van **(2p)**.

b) Az előző részben láttuk, hogy $\text{grad} f(-1, 1)$ létezik **(1p)**, ezért

$$D_{\underline{v}} f(-1, 1) \stackrel{(2\text{p})}{=} \langle \text{grad} f(-1, 1), \underline{v} \rangle \stackrel{(2\text{p})}{=} \left\langle (-8, 8), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \right\rangle \stackrel{(1\text{p})}{=} 0.$$

c) Az érintő sík egy normálvektora:

$$(\partial_1(-1, 1), \partial_2(-1, 1), -1) = (-8, 8, -1) \quad (2\text{p}),$$

egy pontja:

$$(-1, 1, f(-1, 1)) = (-1, 1, 6) \quad (2\text{p}),$$

tehát az érintő sík egyenlete

$$-8(x + 1) + 8(y - 1) - (z - 6) = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad 8x - 8y + z = 10) \quad (2\text{p}).$$

IMSc feladat (8 IMSc pont) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $G \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz esetén az $f^{-1}(G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in G\}$ is nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$ -ben! (Segítség: használjuk a nyíltság és a pontbeli folytonosság definícióját.)

Mo. Legyen $\underline{a} \in f^{-1}(G)$; megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta > 0$, hogy $B_\delta(\underline{a}) \subseteq G$ **(2p)**. Mivel $f(\underline{a}) \in G$ és G nyílt halmaz $\mathbb{R}$ -ben, ezért létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$]f(\underline{a}) - \varepsilon, f(\underline{a}) + \varepsilon[\subseteq G \quad \textbf{(2p)}.$$

Az f függvény $\underline{a}$ -beli folytonossága miatt létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ és $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ esetén

$$f(\underline{x}) \in]f(\underline{a}) - \varepsilon, f(\underline{a}) + \varepsilon[\subseteq G \quad \textbf{(3p)},$$

azaz $\underline{x} \in B_\delta(\underline{a})$ esetén $\underline{x} \in f^{-1}(G)$ teljesül **(1p)**.
