[6. Gyak. anyag]

(Lineáris leképezések képtere, magtere)

1, Adjuk meg a 3-dimenziós térben egy (pontra/) egyenesre (síkra való vetítés/tükrözés képterét és magterét. Ellenőrizzük a dimenziótétel teljesülését!

2, Legyen $\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ (általános) a valós függvények vektortere a pontonkénti műveletekkel. Legyen

$$P : \mathcal{F} \to \mathcal{F},\ (Pf)(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}\ ;\ Q : \mathcal{F} \to \mathcal{F},\ (Qf)(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

i, Igazoljuk, hogy P, Q lineáris leképezések!

ii, Adjuk meg P és Q képterét, magterét.

iii, Igazoljuk, hogy $P + Q = I$.

iv, Igazoljuk, hogy P, Q idempotens, azaz $P^2 = P$, $Q^2 = Q$.

3, Adjunk példát olyan $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{Lin}\,\mathbb{V}$ lineáris transzformációra, mely i, szürjektív, de nem bijektív;
ii, injektív, de nem bijektív!

(A dimenziótétel értelmében ekkor $\dim \mathbb{V} = \infty$.)

4, Mit mondhatunk a $\mathbb{V}$ vektortérről, ha $\exists\, \underline{\underline{A}} \in \mathrm{Lin}\,\mathbb{V}$, melyre $\mathrm{Ker}\,\underline{\underline{A}} = \mathrm{Ran}\,\underline{\underline{A}}$?

— o —

5, Hány dimenziós a $\mathrm{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ vektortér? Ha $\{\underline{e}_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{V}$ és $\{\underline{f}_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathbb{W}$ bázis, akkor adjuk meg $\mathrm{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ egy bázisát!

Determináns

1, Igazoljuk, hogy egy n elemű halmaznak $(n>1)$ ugyanannyi páros és páratlan permutációja van.

2, Legyen σ ~~egy n elemű~~ az $\{1,2,\ldots n\}$ halmaz egy permutációja.

i, Igazoljuk, ~~hogy~~ hogy $0 \le I(\sigma) \le \binom{n}{2}$, ahol $I(\sigma)$ a σ inverziószáma.

ii, Igazoljuk, hogy minden $0 \le k \le \binom{n}{2}$ k egészre $\exists \sigma$, melyre $I(\sigma)=k$.

3, Számítsuk ki a következő $n\times n$-es determinánsokat:

a, $\alpha_{i,j} = \begin{cases} i, & \text{ha } i=j \\ 1, & \text{ha } i\neq j \end{cases}$ b, $\alpha_{i,j} = \min\{i,j\}$

c, $\alpha_{i,j} = i\cdot j$ d, $\alpha_{i,j} = i+j$ e, $\alpha_{i,j} = i^2+j^2$

4, Fejtsük ki a következő determinánsokat többféleképpen is!

a, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ b, $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Mátrixok inverze

5, Melyik mátrixok invertálhatóak? Határozzuk meg az inverzeket (ha léteznek)

a, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; b, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$; c, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ d, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$