Számítási Módszerek a Fizikában 1. (BMETE92AF51, 2018-tól) tételsor

Tasnádi Tamás

2018/19. I. félév

Általános információk

- Csak az érvényes aláírással rendelkező hallgató bocsátható vizsgára.
- A 90 perces írásbeli vizsgadolgozat feladatok megoldását és a tételek, definíciók pontos kimondását, valamint a félév során elhangzott bizonyításokat kéri számon.
- A vizsgán semmiféle segédeszköz, számológép sem használható.
- A vizsga nagyobb súllyal tartalmazza azt az anyagrészt, amelyet évközi zárthelyikben nem kértünk számon, és ebből az anyagrészből külön is teljesíteni kell legalább 40%-ot. Ha a vizsgázó ezt a részt 40%-nál kisebb eredménnyel teljesíti, vagy ha a teljes dolgozat értékelése nem éri el a 40%-ot, akkor a vizsgajegy elégtelen.
- A vizsgajegy kialakítása az 1. és 2. nagy zárthelyi dolgozaton (NZH_1, NZH_2), a kis zárthelyiken (KZH) valamint a vizsgadolgozaton (VD) elért százalékos teljesítmény

  $$p = \frac{NZH_1}{4} + \frac{NZH_2}{4} + \frac{VD}{2} + \frac{KZH - 50}{4}.$$

  súlyozott átlagából a 40%, 55%, 65%, 80% ponthatárok figyelembevételével alakul ki.
- A vizsgajegy a vizsga újbóli felvételével javítható. Ez esetben nem kötelező beadni a dolgozatot (ekkor a Neptunba „igazoltan nem jelent meg” bejegyzés kerül), de a beadott dolgozatok eredménye felülírja a korábbi eredményt, tehát rontani is lehet.
- Alapértelmezésként minden, a tananyagban előforduló definíciót és állítást ismerni kell a vizsgán. Ezen kívül bizonyos tételek bizonyítását is tudni kell ismertetni. Ezt pontosítja az alábbi tételsor. A bizonyítással együtt számonkért tételeket, állításokat vastag szedés jelöli.

Tételek

1. Komplex számok, polinomok

- Komplex számok algebrai, trigonometrikus, exponenciális alakja. Komplex számok konjugáltja, abszolút értéke. Alapműveletek komplex számokkal. **Euler-egyenlet** (levezetés Taylor-sor alapján). Hatványozás és gyökvonás.
- Komplex polinomok. Az algebra alaptétele. Polinomok osztása.
- A komplex exponenciális függvény és inverze; a logaritmus reláció és a logaritmus függvény.
- Csoport és számtest fogalma.
- Lagrange-interpoláció.

2. A sík és tér vektorai

- Alapműveletek vektorokkal (összeadás, számmal szorzás). Vektorok koordinátázása.
- Vektorok skaláris szorzása. **A skaláris szorzás tulajdonságai**.
- Vektoriális szorzás és **tulajdonságai**. Kifejtési tétel.
- Vegyes szorzás és **tulajdonságai**.
- Einstein-konvenció, indexes számolás, Kronecker-delta, Levi-Civita-szimbólum.
- Egyenes és sík normálvektoros egyenlete. Egyenes irányvektoros egyenlete. Egyenes és pont, sík és pont távolsága.
- Diadikus szorzás. Lineáris transzformációk és mátrixaik, vetítések, tükrözések, forgatások. Lineáris transzformációk kompozíciója és mátrixok szorzása.

3. Lineáris algebra

- Vektortér, altér, lineárisan függelten rendszer, generátorrendszer, bázis, dimenzió. **Minden minimális generátorrendszer bázis. Minden maximális lineárisan független rendszer bázis.** Minden lineárisan független rendszer kiegészíthető bázissá, **ennek bizonyítása véges dimenzióban**. Minden generátorrendszerből elhagyhatók úgy vektorok, hogy bázist kapjunk, **ennek bizonyítása véges generátorrendszer esetén**.
- Lineáris leképezések, velük végezhető műveletek. Lineáris leképezés magtere, képtere. **Lineáris leképezés magja, képe altér. Dimenziótétel.** Lineáris leképezés reprezentálása mátrixszal. Mátrixok szorzása és lineáris leképezések kompozíciója.
- Valós és komplex euklideszi tér, norma, ortogonalitás. **Schwarz-egyenlőtlenség. Háromszög egyenlőtlenség. Vektor kifejtése ortonormált bázisban. Minden ortogonális vektorrendszer lineárisan független.**

- Lineáris transzformáció és mátrix adjungáltja. **Az adjungált egyértelműsége (véges dimenzióban). Az adjungálás tulajdonságai.** Speciális mátrixok, transzformációk: normális, unitér, önadjungált mátrixok, transzformációk, ortogonális projekciók. **Ortogonális projekciók algebrai és geometriai jellemzésének azonossága.** Valós euklideszi terekben ortogonális, szimmetrikus mátrixok, transzformációk. **Unitér ill. ortogonális mátrix sorvektorai, oszlopvektorai ortonormált bázist alkotank.**

- Permutációk csoportja. Permutáció inverziószáma. Permutáció paritása. **A paritás csoporthomomorfizmus.** (Segédtételek: **Tetszőleges permutációban szomszédos elemek cseréje eggyel változtatja az inverziószámot. Tetszőleges permutációban bármely két elem kicserélése páratlannal változtatja meg az inverziószámot, és így megváltoztatja a paritást.**)

- Determináns. **A determináns elemi tulajdonságai.** Determináns kiszámolása felső/alsó háromszög alakra hozással. Kifejtési tétel, „ferde" kifejtési tétel. **Vandermonde determináns**. Determináns geometriai jelentése. Általánosított (n-indexes) Levi-Civita-szimbólum. Determináns szorzásszabálya.

- Lineáris transzformációk és mátrixok invertálása. **Véges dimenzióban a bal- és jobbinverz megegyezik.** A klasszikus adjungált mátrix és a **rá vonatkozó** $A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = I\det(A)$ **egyenlőség**.

- Lineáris egyenletrendszerek. Megoldásuk Gauss-eliminációval. Sorekvivalens átalakítások, lépcsős alak, redukált lépcsős alak, vezéregyes.

- Mátrix invertálása Gauss-eliminációval.

- **Lineáris egyenletrendszer megoldása Cramer-szabállyal.**

- Lineáris leképezés és mátrix rangja. Rang, sorrang, oszloprang, determinánsrang egyenlősége. **Vezéregyesek száma megegyezik a ranggal.**

- Bázistranszformáció. **Mátrix determinánsa bázistranszformációval szemben invariáns.**

- Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. **Azonos sajátértékhez tartozó sajátvektorok és a nullvektor lineáris alteret alkot. Önadjungált mátrix sajátértékei valósak és különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterek ortogonálisak. Unitér mátrix sajátértékei egységnyi abszolútértékűek és különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterek ortogonálisak.**

- Diagonális mátrixok kommutatív részalgebrája. **Egy mátrix (lineáris transzformáció) pontosan akkor diagonalizálható, ha létezik sajátvektorokból álló bázisa a vektortérnek.**

- Normális mátrix sajátalterei ortogonálisak és kifeszítik a teljes vektorteret. Normális mátrix unitérrel (szimmetrikus mátrix ortogonálissal) diagonalizálható. Normális mátrix spektrálfelbontása. Normális mátrix függvényeinek számolása spektrálfelbontás alapján.

- Karakterisztikus egyenlet, minimálpolinom. **A karakterisztikus polinom invariáns a bázistranszformációval szemben.** Cayley–Hamilton-tétel.

- Mátrixok függvényének számolása Taylor-sor alapján.

- Nilpotens mátrixok. **Nilpotens mátrixnak nincs nullától különböző sajátértéke. Egy mátrix pontosan akkor nilpotens, ha karakterisztikus polinomja monom (hatványfüggvény).**

- Mátrix illetve lineáris transzformáció nyoma. **A nyom tulajdonságai: lineáris, nyom argumentumában levő szorzat ciklikusan átrendezhető, nyom a bázistranszformációval szemben invariáns. Nyom és determináns kapcsolata a karakterisztikus polinom együtthatóival.**