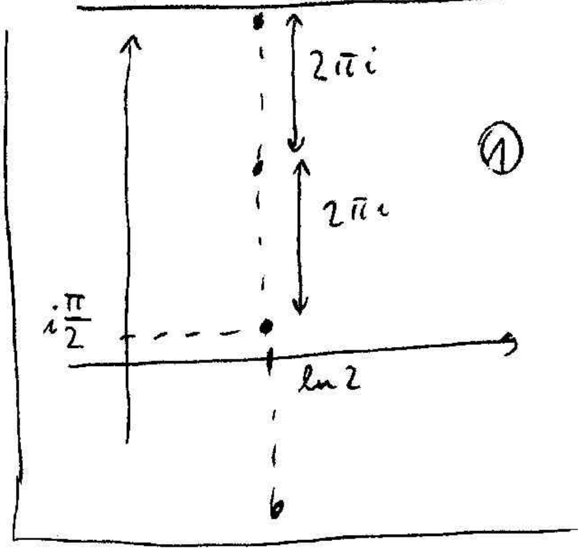
1, [4] a, $e^z = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z = \mathrm{Ln}\left(2e^{i\pi/2}\right) = \underline{\underline{\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}}}$ ③



[6] b, $\dfrac{-40-32i}{4-5i} = \dfrac{(-40-32i)(4+5i)}{16+25} =$

$= \dfrac{-160+160-128i-200i}{41} = \dfrac{-328i}{41} = -8i$

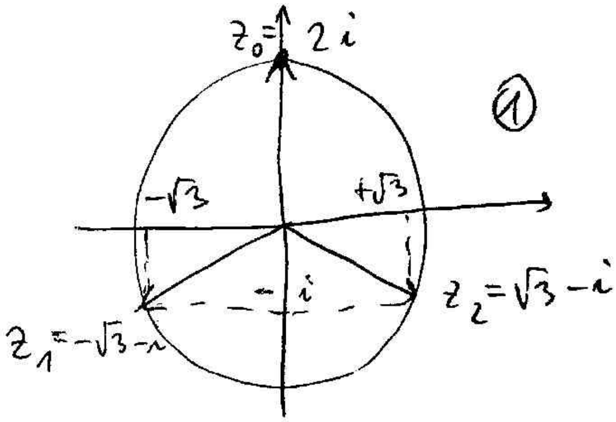
$= 8 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ②

$z_k = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$ ①

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{2i}}$

$z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = \underline{\underline{-\sqrt{3} - i}}$ ②

$z_3 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \underline{\underline{+\sqrt{3} - i}}$



2, T.: $|\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle| \le \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|$ ③

B.: $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén

$0 \le \|\underline{a}t + \underline{b}\|^2 = t^2\|\underline{a}\|^2 + 2t\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle + \|\underline{b}\|^2$ ③

Tehát a másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív vagy 0:

$\left(2\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle\right)^2 - 4\|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 \le 0$

$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2 \le \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2$ ④

$|\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle| \le \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|$ ✓

3/ $\phi(A)=B \Rightarrow \phi(\underline{i}+\underline{j}-\underline{k}) = -\underline{i}+\underline{j}+\underline{k}$ (1) ϕ lineáris, tehát:

$\phi(B)=C \Rightarrow \phi(-\underline{i}+\underline{j}+\underline{k}) = \underline{i}-\underline{j}+\underline{k}$ (2)

$\phi(C)=D \Rightarrow \phi(\underline{i}-\underline{j}+\underline{k}) = -\underline{i}-\underline{j}-\underline{k}$ (3)

$$(1)+(3) \Rightarrow \phi(2\underline{i}) = -2\underline{i}, \quad \phi(\underline{i}) = -\underline{i}$$
$$(1)+(2) \Rightarrow \phi(2\underline{j}) = 2\underline{k}, \quad \phi(\underline{j}) = \underline{k} \quad \Rightarrow [\phi] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$(2)+(3) \Rightarrow \phi(2\underline{k}) = -2\underline{j}, \quad \phi(\underline{k}) = -\underline{j}$$
6

$$\phi(D) = \phi(-\underline{i}-\underline{j}-\underline{k}) = \underline{i}-\underline{k}+\underline{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A$$
2

$$\det\phi = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$
tehát a transzformáció nem változtatja meg a térfogatot. 2

4/ a/ D.: Rank $\underline{\underline{A}}$ = Dim Ran $\underline{\underline{A}}$ (rang = képtér dimenziója) 2

T.: $\underline{\underline{A}}$ rangja = $\underline{\underline{A}}$ mátrixában a lineárisan független sorok maximális száma = $\underline{\underline{A}}$ mátrixában a lineárisan független oszlopok maximális száma = $\underline{\underline{A}}$ mátrixában a legnagyobb nem nulla aldetermináns mérete. 3

b/ Sor és oszlopekvivalens átalakításokat végzünk, majd megszámoljuk a vezéregyeseket:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ -3 & -6 & 12 \\ 4 & 5 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -6 & 18 \\ 0 & 5 & -15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ /:3 \\ /:(-6) \\ /:(5) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

5

Tehát a rang $\underline{\underline{2}}$.

5.* $\boxed{2}$ a, D.: $H \in \mathcal{L}(V)$ önadjungált, ha $\underline{\underline{H}}^* = \underline{\underline{H}}$. (2)

$\boxed{8}$ b, T.: Ha $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}^*$, akkor H sajátértékei valósak, és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak egymásra. (2)

B.: Legyen $\underline{\underline{H}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$. Ekkor

$$\lambda \|\underline{v}\|^2 = \lambda \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \lambda \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{\underline{H}}\,\underline{v} \rangle = \langle \overset{\underline{\underline{H}}^*}{\underline{\underline{H}}}\,\underline{v}, \underline{v} \rangle =$$

$$= \langle \lambda \underline{v}, \underline{v} \rangle = \overline{\lambda} \|\underline{v}\|^2 \iff \lambda = \overline{\lambda} \iff \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Legyen $\underline{\underline{H}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$, és $\underline{\underline{H}}\,\underline{u} = \mu \underline{u}$, $\lambda \neq \mu$. Ekkor $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, és

$$\lambda \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \langle \lambda \underline{v}, \underline{u} \rangle = \langle \underline{\underline{H}}\,\underline{v}, \underline{u} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{\underline{H}}\,\underline{u} \rangle = \langle \underline{v}, \mu \underline{u} \rangle =$$

$$= \mu \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle \Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = 0 \quad (3)$$

6.* $A = \frac{\pi}{6}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ a, $\boxed{4}$ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{6} - \lambda & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{\pi}{6} - \lambda\right)\left(\frac{\pi}{3} - \lambda\right)$

$\lambda_1 = \frac{\pi}{6}$ (1); $\frac{\pi}{6}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\pi}{6}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x + 3y = x \\ 2y = y \end{matrix} \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (1)

$\lambda_2 = \frac{\pi}{3}$ (1); $\frac{\pi}{6}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\pi}{3}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x + 3y = 2x \\ 2y = 2y \end{matrix} \Rightarrow \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (1)

b, A nem normális, mert $\underline{v}_1 \not\perp \underline{v}_2$. (vagy $AA^* \neq A^*A$) (1)

$\boxed{5}$ c, A a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ bázisban diagonális, így

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \pi/6 & \pi/2 \\ 0 & \pi/3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B = [\underline{v}_1 | \underline{v}_2]} \; (2) \; ; \Rightarrow A = B D B^{-1} \; (1)$$

$$\sin A = B \begin{bmatrix} \sin \pi/6 & 0 \\ 0 & \sin \pi/3 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$