Szá Mód Fiz. 1. ZH2. -1- 2018.11.22.

1, a, $\mathbb{U}\subset\mathbb{V}$ a $\mathbb{V}$ vektortér lineáris altere, ha $\forall\,\alpha,\beta$ skalárra és
(3) $\forall\, u_1,u_2\in\mathbb{U}$ esetén $\alpha u_1+\beta u_2\in\mathbb{U}$, azaz $\mathbb{U}$ zárt a vektorok összeadására és számmal való szorzására. (és $\mathbb{U}\neq\emptyset$)

b, A $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i\in I}\subset\mathbb{V}$ vektorrendszer lineárisan független, ha bármely
(4) véges $I'\subset I$ és α_i skalárok esetén ha

$$\sum_{i\in I'}\alpha_i\underline{v}^{(i)}=\underline{0}$$

akkor $\forall i\in I'$-re $\alpha_i=0$, azaz a nullvektort csak a $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i\in I}$ vektorok triviális lineáris kombinációja állítja elő.

c, Ha $\mathbb{U},\mathbb{V}$ két vektortér, $A\in\mathcal{L}in(\mathbb{U},\mathbb{V})$, akkor
(3)

$$\dim\mathbb{U}=\dim(\mathrm{Ker}\,A)+\dim(\mathrm{Ran}\,A)$$

2, $(Af)(x)=f(x)+f(-x)$

a, $\forall\, f,g\in\mathcal{F}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ esetén

(3) $(A(\alpha f+g))(x)=(\alpha f+g)(x)+(\alpha f+g)(-x)=\alpha f(x)+g(x)+\alpha f(-x)+g(-x)=$

$=\alpha(f(x)+f(-x))+(g(x)+g(-x))=\alpha(Af)(x)+(Ag)(x)=(\alpha Af+Ag)(x)$

Tehát $A(\alpha f+g)=\alpha Af+Ag$ ✓

b, $f\in\mathrm{Ker}\,A\iff(Af)(x)=f(x)+f(-x)=0\iff\forall x$-re $f(x)=-f(-x)\iff$ f páratlan fgv.

Tehát $\mathrm{Ker}\,A$ = "páratlan függvények". (2)

Látható, hogy $\forall f\in\mathcal{F}$-re Af páros, és ha g páros függvény, akkor $A(\frac{g}{2})=g$, tehát $\mathrm{Ran}\,A$ = „páros függvények" (2)

c, $(A^2f)(x)=(Af)(x)+(Af)(-x)=f(x)+f(-x)+f(-x)+f(x)=2f(x)+2f(-x)=$

$=2(Af)(x)$, tehát $A^2=2A$ (3)

3, 2. oszlop szerint fejtjük ki:

(10)

$$\begin{vmatrix}1&\boxed{0}&2&3\\-2&\boxed{-3}&0&4\\2&\boxed{2}&3&0\\1&\boxed{0}&-1&1\end{vmatrix}=(-3)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&0\\1&-1&1\end{vmatrix}}_{3\cdot(-2-3)+1(3-4)=-16}+(-1)\cdot2\cdot\overbrace{\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&0&4\\1&-1&1\end{vmatrix}}^{+2(2+3)-4(-1-2)=22}=48-44=\underline{\underline{4}}$$

4,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -7 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 15 \\ 2 & 5 & -6 & -3 & -26 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -7 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 15 \\ 2 & 5 & -6 & -3 & -26 \end{array}\right] \begin{array}{c}(-3)\\(-2)\\(-2)\end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & 17 \\ 0 & -4 & 7 & 5 & 29 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & -12 \end{array}\right] \times(-1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -17 \\ 0 & -4 & 7 & 5 & 29 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & -12 \end{array}\right] \begin{array}{c}(4)\\(-3)\end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & -13 & -11 & -39 \\ 0 & 0 & +13 & +11 & +39 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 11/13 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$$

lépcsős alak

3 db vezéregyes van, tehát az együttható mátrix rangja és a képtérnek dimenziója 3, ② a magtérnek dimenziója $4-3=\underline{1}$. ①

Elkészítjük a redukált lépcsős alakot is!

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a, & b, & c, & d, & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 9/13 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/13 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/13 & 3 \end{array}\right] \end{array} (-1) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a, & b, & c, & d, & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6/13 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/13 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/13 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

redukált lépcsős alak

Tehát az általános megoldás:

$d \in \mathbb{R}$ tetszőleges,

$$a = 1 - \frac{6}{13}d$$

$$b = -2 - \frac{3}{13}d$$

$$c = 3 - \frac{11}{13}d$$

⑦ vagy még szebben:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1-6t \\ b = -2-3t \\ c = 3-11t \\ d = 13t \end{array} \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

5,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-1)+2+3 = 7 \quad ③$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -9 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}}} \quad ⑤$$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \underline{\underline{\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -9 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}}} \quad ②$$

6,

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\Big(\underbrace{(3-\lambda)(1-\lambda)+2}_{\lambda^2-4\lambda+5 = (\lambda-2)^2+1}\Big) \doteq$$ ③

$$= -(\lambda-1)(\lambda-(2+i))(\lambda-(2-i))$$

$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 2+i,\quad \lambda_3 = 2-i$ ③

$\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A-\lambda_1 I} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow 4y+2z=0 \\ \Rightarrow 2y-z=0 \\ \quad\; 2y=0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow x = \text{tetszőleges};\ y=z=0$$

Tehát a sajátvektor: $\underline{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ④