Komplex számok halmaza. Jele $\mathbb{C}$.

Definíció

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

A műveletek $z_1 = (x_1, y_1)$ és $z_2 = (x_2, y_2)$ jelölésekkel:

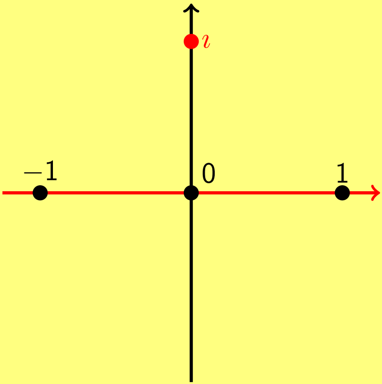
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

Mielőtt megmutatjuk, hogy a komplex számok is testet alkotnak bevezetjük a következőket.

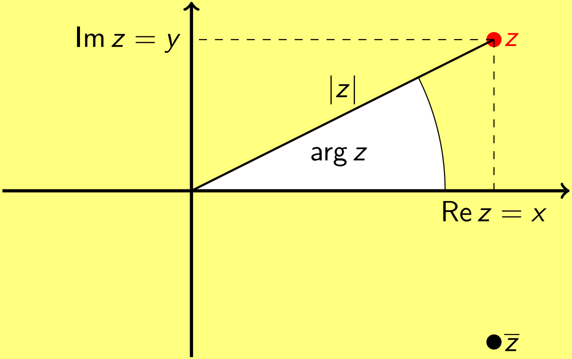
$\mathbb{R}$-et azonosítjuk $\mathbb{R} \times \{0\}$-val, így $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$. ($x \in \mathbb{R}$ esetén a megfeleltetés $x \sim (x, 0) \in \mathbb{C}$.)
Ekkor $(1, 0) = 1$ a valós egység, és $\imath = (0, 1)$ a képzetes egység. Vegyük észre, hogy

$$\imath^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$



A $z = (x, y)$ komplex szám esetén:

- valós rész: $\operatorname{Re} z = x \in \mathbb{R}$;
- képzetes rész: $\operatorname{Im} z = y \in \mathbb{R}$;
- abszolút érték: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$;
- argumentum: $\arg z = \begin{cases} \arccos\left((\operatorname{Re} z)/|z|\right), & \text{ha } 0 \leq \operatorname{Im} z; \\ -\arccos\left((\operatorname{Re} z)/|z|\right), & \text{ha } \operatorname{Im} z < 0; \end{cases}$
- konjugált: $\bar{z} = (x, -y)$;



A z komplex szám algebrai alakja

$$z = 1\,\mathrm{Re}\,z + \imath\,\mathrm{Im}\,z = \mathrm{Re}\,z + \imath\,\mathrm{Im}\,z.$$

Ha $z = (x, y)$, akkor algebrai alakban

$$z = x + \imath y.$$

Ebben az alakban a műveletek egyszerűbben megjegyezhetőek. Ha $z_1 = x_1 + \imath y_1$ és $z_2 = x_2 + \imath y_2$, akkor

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \imath y_1) + (x_2 + \imath y_2) = (x_1 + x_2) + \imath(y_1 + y_2);$$

és

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = (x_1 + \imath y_1)(x_2 + \imath y_2) &= x_1 x_2 + x_1 \imath y_2 + \imath y_1 x_2 + \overbrace{\imath y_1 \imath y_2}^{\imath^2 y_1 y_2} = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \imath(x_1 y_2 + y_1 x_2); \end{aligned}$$

Egyszerű számolással $z = x + \imath y$ esetén

$$z\bar{z} = (x + \imath y)(x - \imath y) = x^2 + \imath y x - x \imath y - \imath^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Tétel

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *test.* *(**??**)*

Bizonyítás vázlat.

- nullelem: $0 = (0,0) = 0 + \imath 0$;
- $z = x + \imath y$ additív inverze: $-z = -x + \imath(-y)$;
- egységelem: $1 = (1,0) = 1 + \imath 0$;
- $z = x + \imath y \neq 0$ multiplikatív inverze:
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \imath \frac{-y}{x^2+y^2};$$

Az összeadás és szorzás asszociativitása, kommutativitása, és a szorzás összeadásra vonatkozó disztributivitása egyszerű számolás. $\square$

Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $\operatorname{Re} z_1 =?$
- $\operatorname{Im} z_2 =?$
- $\sqrt{3} z_1 =?$
- $\overline{z_1} =?$
- $z_1 + 2\overline{z_2} =?$
- $z_1 - z_2 =?$
- $|z_1| =?$
- $\arg z_2 =?$
- $z_1 z_2 =?$
- $\dfrac{z_1}{z_2} =?$

CSAK VÁZLAT (PG)

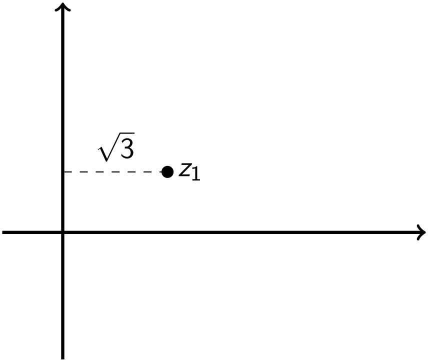
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $\operatorname{Re} z_1 = ?$

Megoldás.

- $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re}\left(\sqrt{3} + \imath\right) = \sqrt{3}$; $\square$



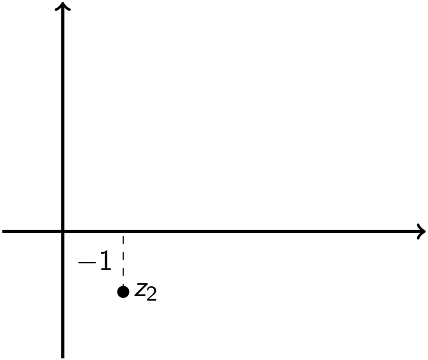
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $\operatorname{Im} z_2 = ?$

Megoldás.

- $\operatorname{Im} z_2 = \operatorname{Im}(1 - \imath) = -1;$ $\square$



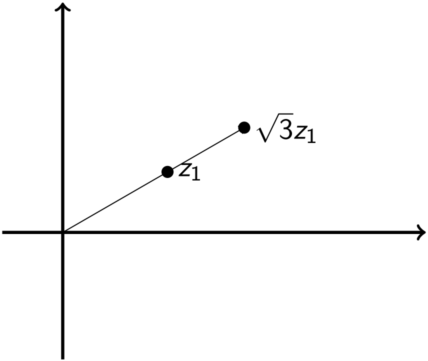
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $\sqrt{3}z_1 = ?$

Megoldás.

- $\sqrt{3}z_1 = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} + \imath\right) = 3 + \sqrt{3}\imath;$ $\square$



CSAK VÁZLAT (PG)

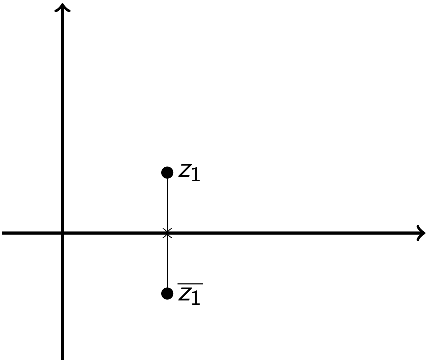
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $\overline{z_1} = ?$

Megoldás.

- $\overline{z_1} = \overline{\sqrt{3} + \imath} = \sqrt{3} - \imath;$ $\square$



CSAK VÁZLAT (PG)

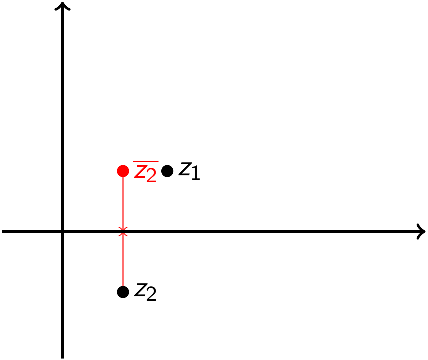
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $z_1 + 2\overline{z_2} = ?$

Megoldás.

- $z_1 + 2\overline{z_2} = \sqrt{3} + \imath + 2(1 + \imath)$



CSAK VÁZLAT (PG)

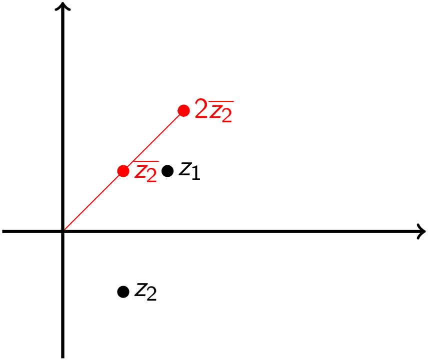
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $z_1 + 2\overline{z_2} = ?$

Megoldás.

- $z_1 + 2\overline{z_2} = \sqrt{3} + \imath + 2(1 + \imath) = \sqrt{3} + \imath + 2 + 2\imath$



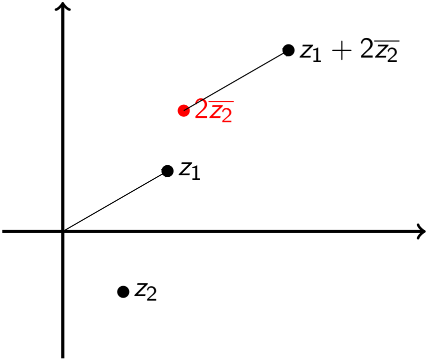
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $z_1 + 2\overline{z_2} = ?$

Megoldás.

- $z_1 + 2\overline{z_2} = \sqrt{3} + \imath + 2(1 + \imath) = \sqrt{3} + \imath + 2 + 2\imath = 2 + \sqrt{3} + 3\imath;$ □



CSAK VÁZLAT (PG)

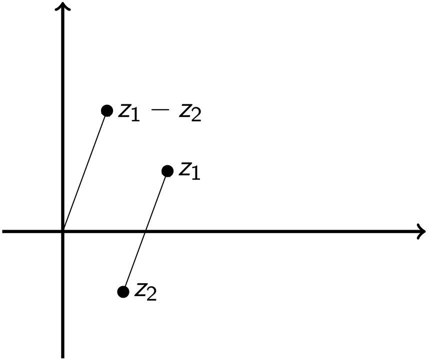
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $z_1 - z_2 = ?$

Megoldás.

- $z_1 - z_2 = \sqrt{3} - 1 + 2\imath;$ □



CSAK VÁZLAT (PG)

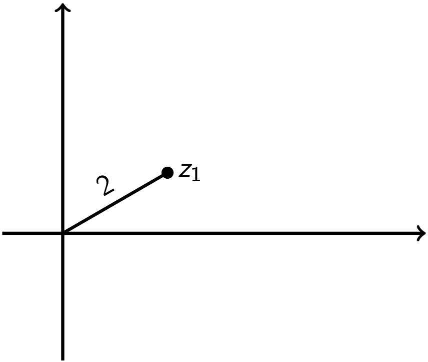
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $|z_1| =?$

Megoldás.

- $|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2;$ $\square$



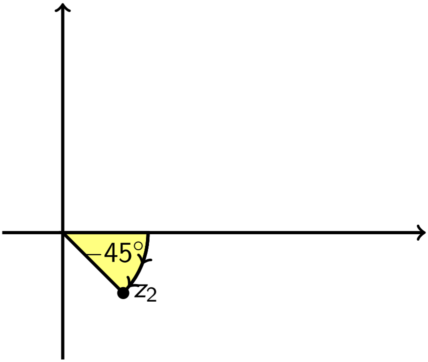
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $\arg z_2 =?$

Megoldás.

- $\arg z_2 = -\arccos \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



CSAK VÁZLAT (PG)

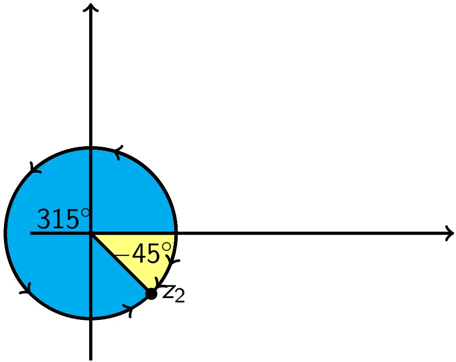
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $\arg z_2 = ?$

Megoldás.

- $\arg z_2 = -\arccos \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -45^\circ \equiv 315^\circ \pmod{360^\circ}$; $\square$



CSAK VÁZLAT (PG)

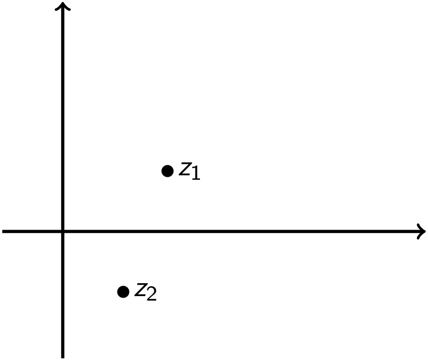
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $z_1 z_2 = ?$

Megoldás.

- $z_1 z_2 = (\sqrt{3} + \imath)(1 - \imath) = \sqrt{3} - \sqrt{3}\imath + \imath - \imath^2$



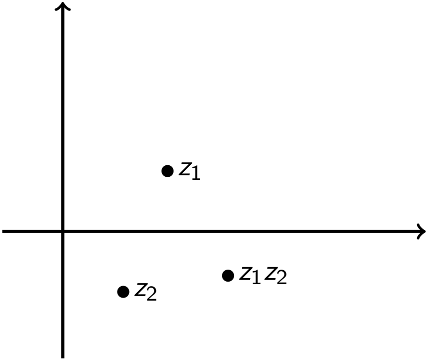
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $z_1 z_2 =?$

Megoldás.

- $z_1 z_2 = (\sqrt{3} + \imath)(1 - \imath) = \sqrt{3} - \sqrt{3}\imath + \imath - \imath^2 = \sqrt{3} + 1 + \imath(1 - \sqrt{3});$ $\square$



CSAK VÁZLAT (PG)

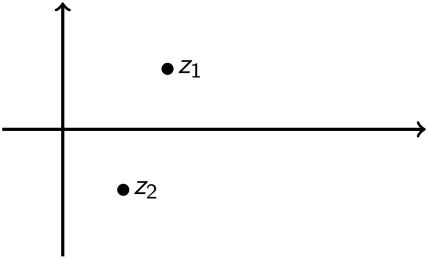
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $\dfrac{z_1}{z_2} = ?$

Megoldás.

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$



CSAK VÁZLAT (PG)

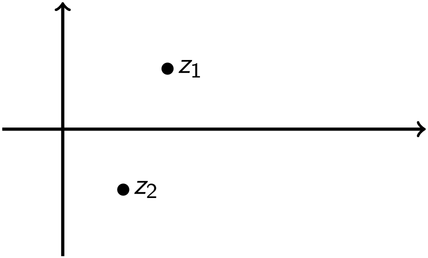
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $\dfrac{z_1}{z_2} = ?$

Megoldás.

- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(\sqrt{3}+\imath)(1+\imath)}{(1-\imath)(1+\imath)} = \frac{\sqrt{3}-1+\imath(\sqrt{3}+1)}{1+\imath-\imath-\imath^2}$$



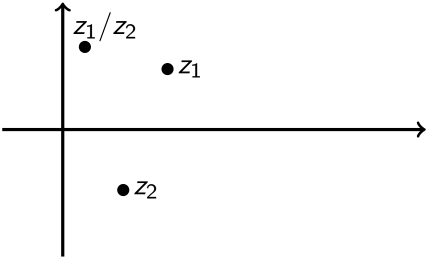
Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $\dfrac{z_1}{z_2} = ?$

Megoldás.

- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(\sqrt{3}+\imath)(1+\imath)}{(1-\imath)(1+\imath)} = \frac{\sqrt{3}-1+\imath(\sqrt{3}+1)}{1+\imath-\imath-\imath^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}+1}{2};$$ $\square$



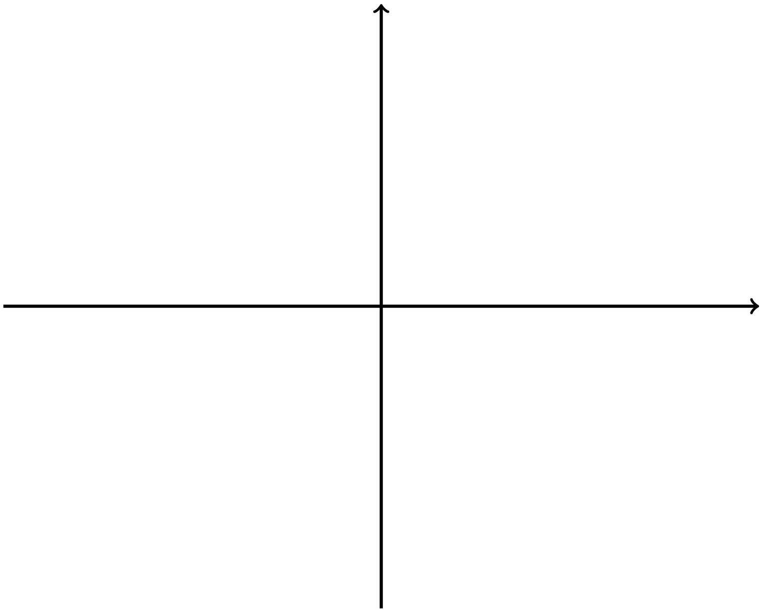
Könnyen beláthatóak a következők.

Tétel (alapműveletek kapcsolata a konjugálttal és az abszolútértékkel)

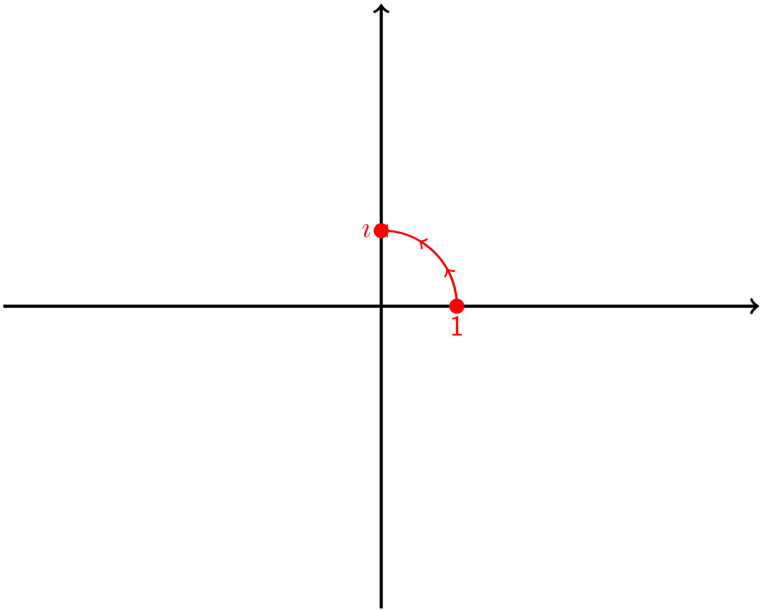
Ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor

- $$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$
  és ha $z_2 \neq 0$, akkor
  $$\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}.$$
- $$|z_1| = |\overline{z_1}|, \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$
  és ha $z_2 \neq 0$, akkor
  $$|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|.$$
- *háromszög-egyenlőtlenség* $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, *illetve*
  $$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|, \quad \textit{sőt} \quad \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|.$$

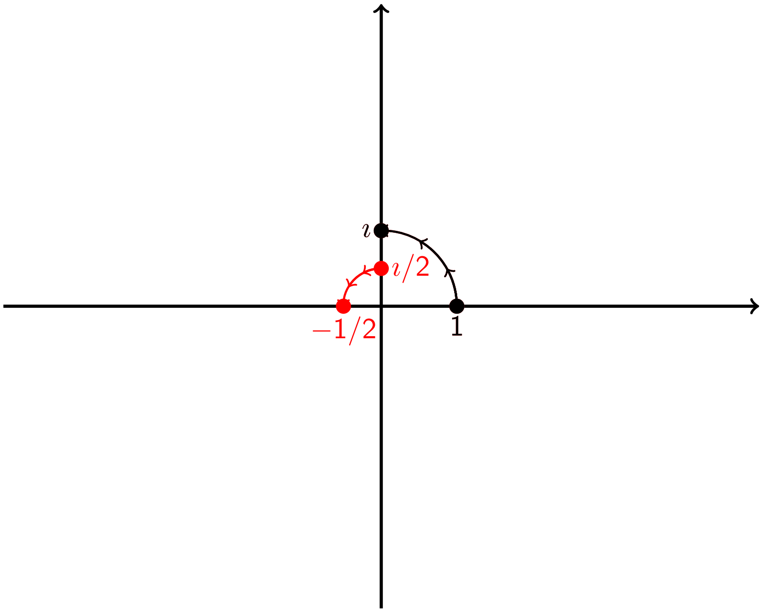
Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.



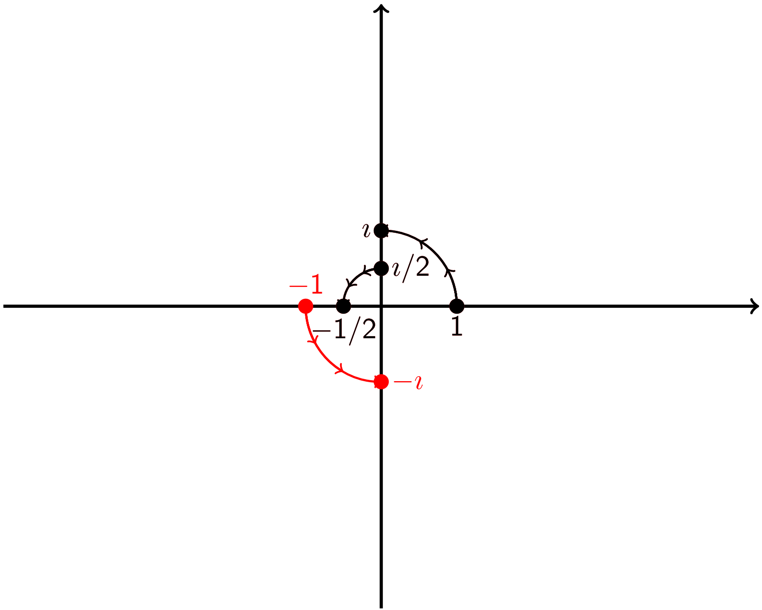
Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.



Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90°$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.

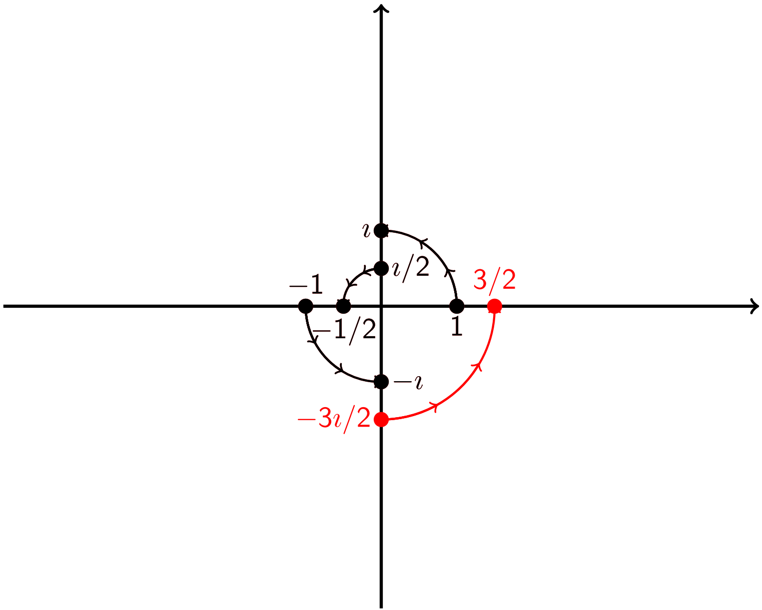


Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.

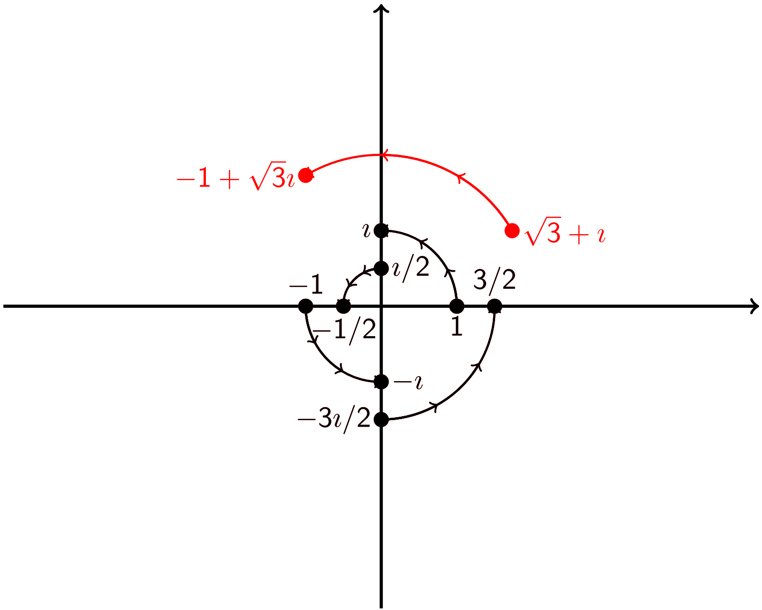


CSAK VÁZLAT (PG)

Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.

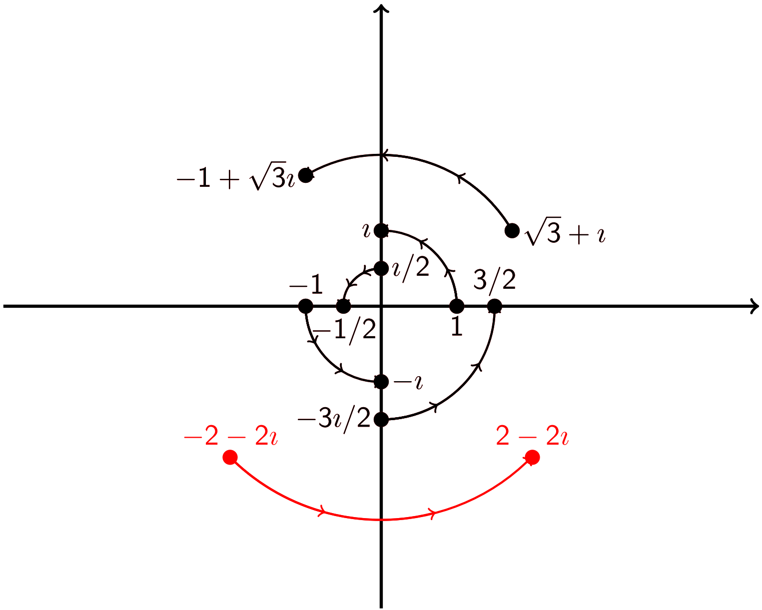


Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.

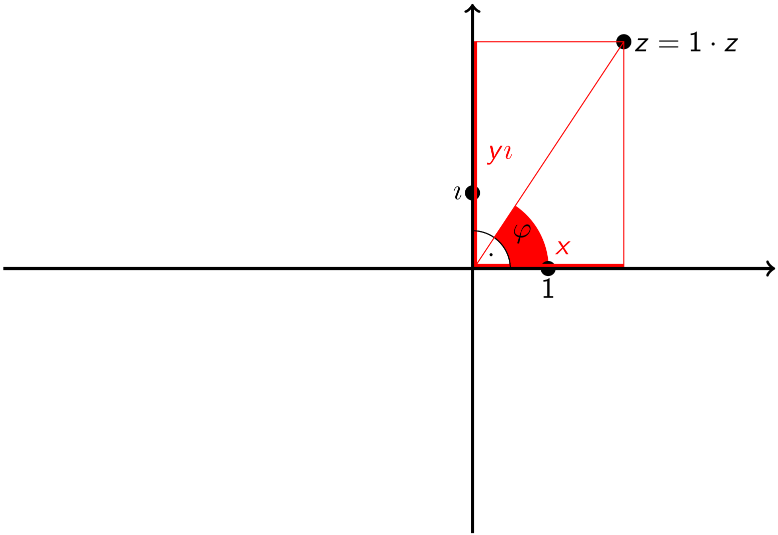


CSAK VÁZLAT (PG)

Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90°$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.

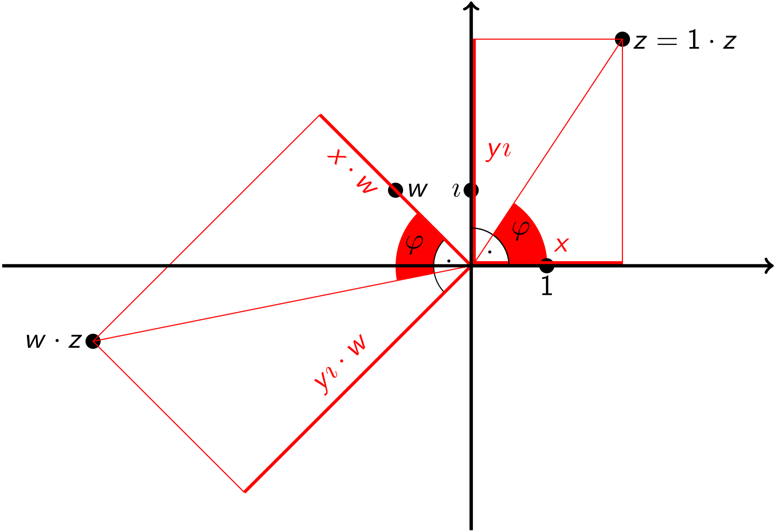


Legyenek w és $z = x + y\imath$ tetszőleges komplex számok, és legyen $\varphi = \arg z$!



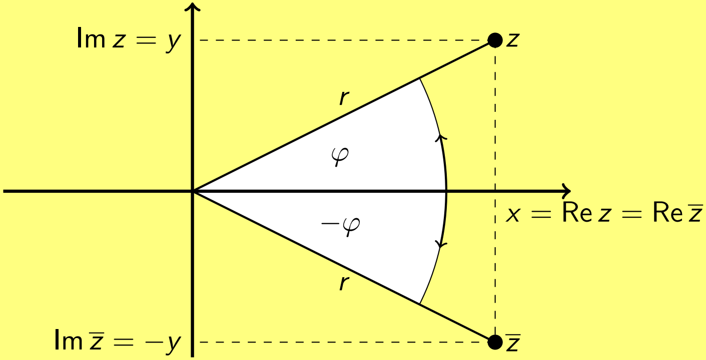
$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z| \qquad \text{és} \qquad \arg(w \cdot z) = \arg w + \arg z.$$

Legyenek w és $z = x + y\imath$ tetszőleges komplex számok, és legyen $\varphi = \arg z$!



$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z| \qquad \text{és} \qquad \arg(w \cdot z) = \arg w + \arg z.$$

A $z = x + y\imath$ komplex szám esetén legyen $r = |z|$ és $\varphi = \arg z$!



Leolvasható a z komplex szám trigonometriai alakja.

$$z = r(\cos \varphi + \imath \sin \varphi) \qquad\qquad \overline{z} = r(\cos -\varphi + \imath \sin -\varphi)$$

Az előzőek szerint

$$r_1(\cos\varphi_1 + \imath\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + \imath\sin\varphi_2) = \\ = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \imath\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Innen, ha $r \neq 0 (\iff z \neq 0)$, akkor

$$r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)\cdot\frac{1}{r}(\cos-\varphi + \imath\sin-\varphi) = \\ = \frac{r}{r}(\cos(\varphi-\varphi) + \imath\sin(\varphi-\varphi)) = 1,$$

azaz

$$\frac{1}{r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos-\varphi + \imath\sin-\varphi),$$

és így

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + \imath\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + \imath\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \imath\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Trigonometriai alakban könnyen elvégezhető a hatványozás.

$$[r(\cos\varphi + \imath \sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + \imath \sin n\varphi) \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

Valójában, ha $r \neq 0$, akkor ez $n \in \mathbb{Z}$ esetén is igaz.
$n \in \mathbb{N}^+$ esetén értelmezzük a komplex n-edik gyökvonást. Ha $z \neq 0$, akkor n különböző olyan $w \in \mathbb{C}$ van, amire $w^n = z$. Ezeket hívjuk a z n-edik komplex gyökeinek.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + \imath \sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k360^\circ}{n} + \imath \sin\frac{\varphi + k360^\circ}{n}\right)$$
$$(k = 0, \ldots, n-1)$$

CSAK VÁZLAT (PG)

Összefoglalva.

Tétel (alapműveletek, hatványozás, gyökvonás és konjugálás kapcsolata az argumentummal)

Ha $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ *és* $n \in \mathbb{N}^+$, *akkor*

- $$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

  és ha $z_2 \neq 0$, *akkor*

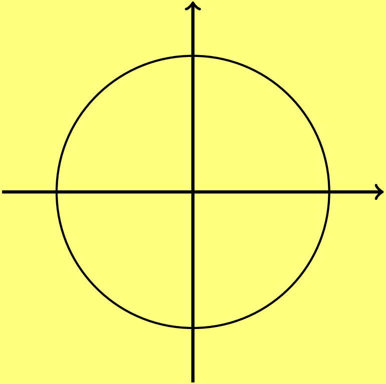
  $$\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

- $$\arg z^n = n \arg z, \qquad \arg \sqrt[n]{z} = \frac{\arg z + k360^\circ}{n}.$$

- $$\arg \overline{z} = -\arg z$$

Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

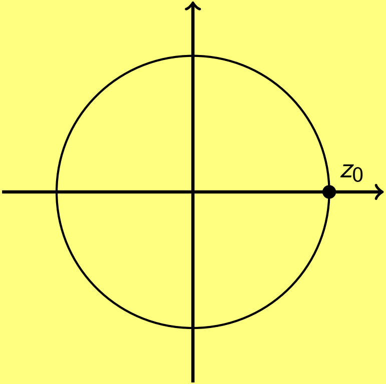
$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath\sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$



Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath\sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

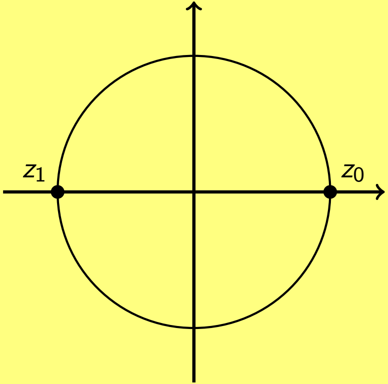
$n = 1$:
$\sqrt[1]{1} = \cos 0 \cdot 360^\circ + \imath \sin 0 \cdot 360^\circ$
$z_0 = 1$



Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath \sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \dots, n-1)$$

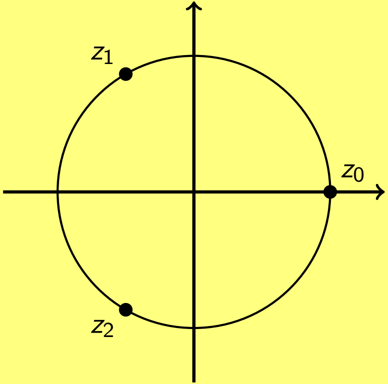
$n = 2$:
$\sqrt{1} = \cos k180^\circ + \imath \sin k180^\circ$
$z_{0,1} = \pm 1$



CSAK VÁZLAT (PG)

Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

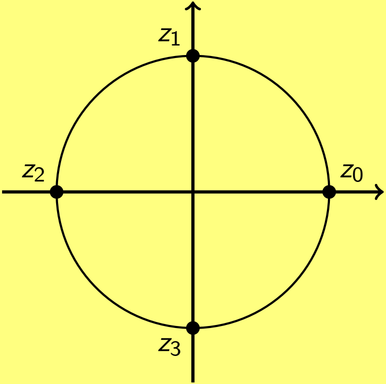
$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath\sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$



$n = 3$:
$\sqrt[3]{1} = \cos k120^\circ + \imath\sin k120^\circ$
$z_0 = 1$,
$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$

Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath\sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \dots, n-1)$$

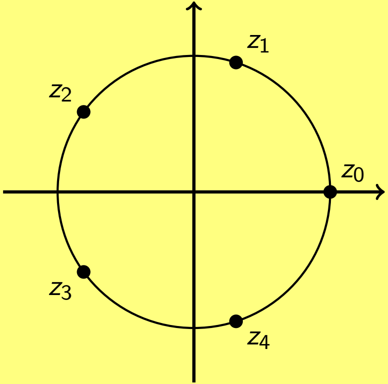


$n = 4$:
$\sqrt[4]{1} = \cos k90^\circ + \imath\sin k90^\circ$
$z_{0,2} = \pm 1$,
$z_{1,3} = \pm\imath$

Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath\sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \dots, n-1)$$

$n = 5$:
$\sqrt[5]{1} = \cos k72^\circ + \imath \sin k72^\circ$
$z_0 = 1$,
$$z_{1,4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\imath,$$
$$z_{2,3} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\imath$$

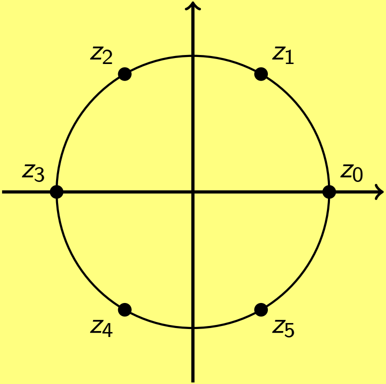


CSAK VÁZLAT (PG)

Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath\sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

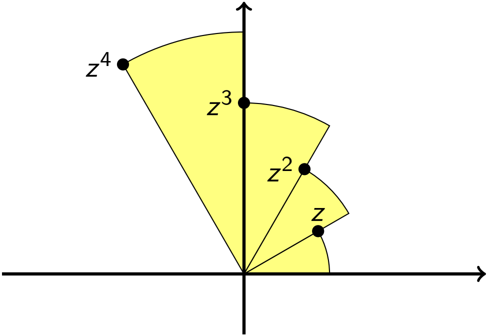
$n = 6$:
$\sqrt[6]{1} = \cos k60^\circ + \imath\sin k60^\circ$
$z_{0,3} = \pm 1,$
$z_{1,2,4,5} = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$



Feladat

Legyen $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\imath}{2}$!

$z^4 = ?$

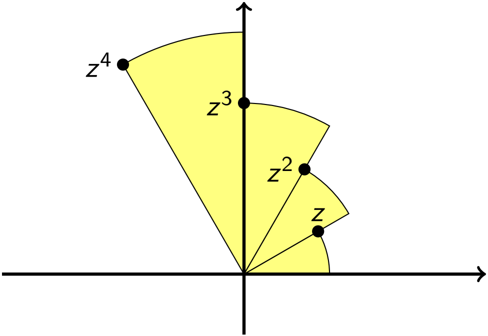


CSAK VÁZLAT (PG)

Feladat

Legyen $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\imath}{2}$!

$z^4 = ?$



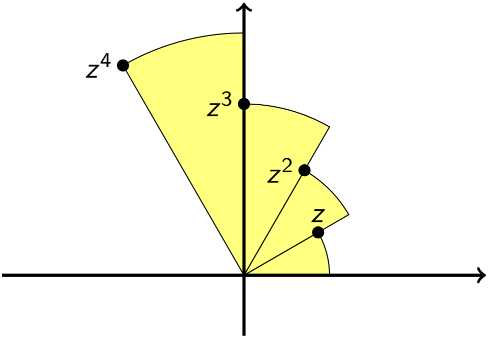
Megoldás.

$$|z| = \sqrt{\frac{\sqrt{6}^2+\sqrt{2}^2}{2^2}} = \sqrt{2};$$

Feladat

Legyen $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\imath}{2}$!

$z^4 = ?$



Megoldás.

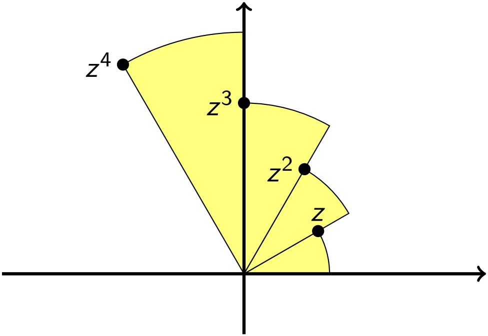
$$|z| = \sqrt{\frac{\sqrt{6}^2+\sqrt{2}^2}{2^2}} = \sqrt{2};\ \arg z = \arccos\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = 30^\circ;$$

CSAK VÁZLAT (PG)

Feladat

Legyen $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\imath}{2}$!

$z^4 = ?$



Megoldás.

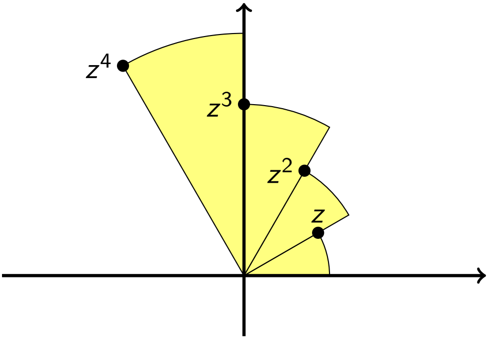
$|z| = \sqrt{\dfrac{\sqrt{6}^2+\sqrt{2}^2}{2^2}} = \sqrt{2}$; $\arg z = \arccos \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = 30^\circ$;

$z^4 = [\sqrt{2}(\cos 30^\circ + \imath \sin 30^\circ)]^4$

Feladat

Legyen $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\imath}{2}$!

$z^4 = ?$



Megoldás.

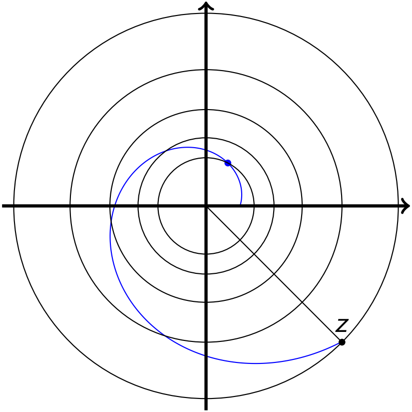
$|z| = \sqrt{\dfrac{\sqrt{6}^2+\sqrt{2}^2}{2^2}} = \sqrt{2}$; $\arg z = \arccos \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = 30^\circ$;

$z^4 = [\sqrt{2}(\cos 30^\circ + \imath \sin 30^\circ)]^4 = 4(\cos 120^\circ + \imath \sin 120^\circ)$; $\square$

Feladat

Legyen $z = 4 - 4\imath$!

$\sqrt[5]{z} = ?$

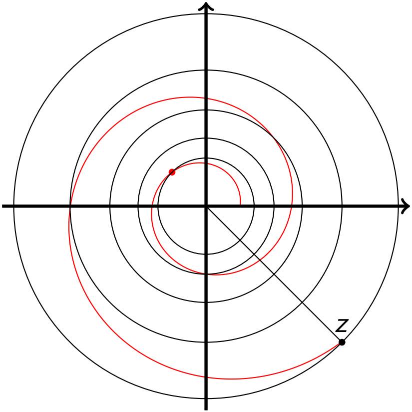


Megoldás.

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;

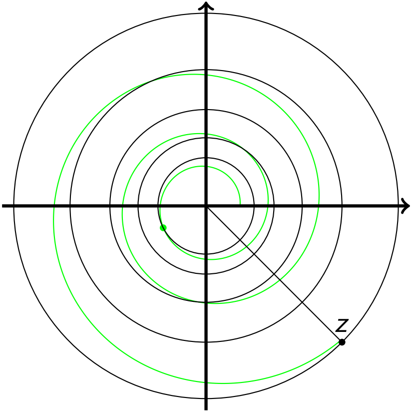
Feladat

Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$



Megoldás.

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;



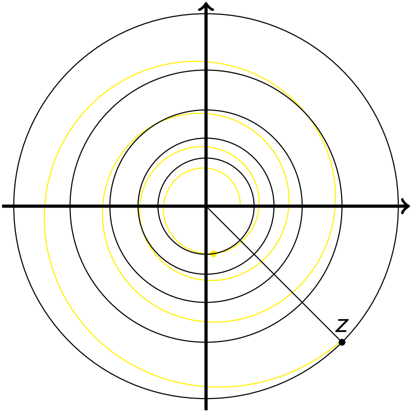
Feladat

Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$

Megoldás.

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;

CSAK VÁZLAT (PG)



Feladat

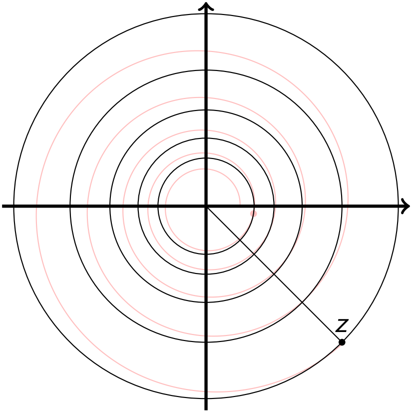
Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$

Megoldás.

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;

Feladat

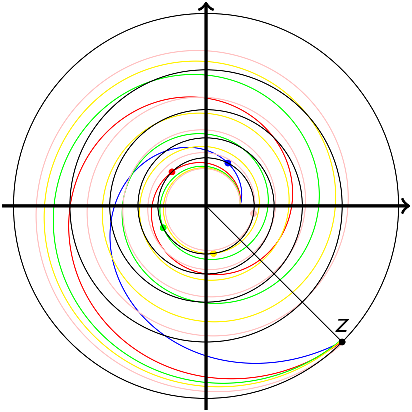
Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$



Megoldás.

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;

CSAK VÁZLAT (PG)



Feladat

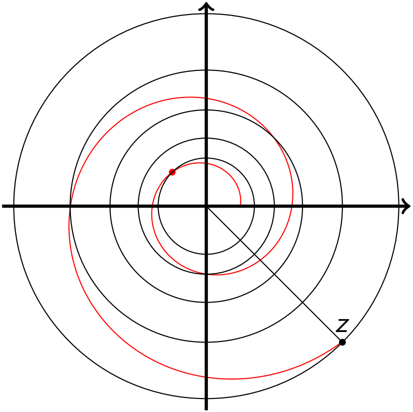
Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$

Megoldás.

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;

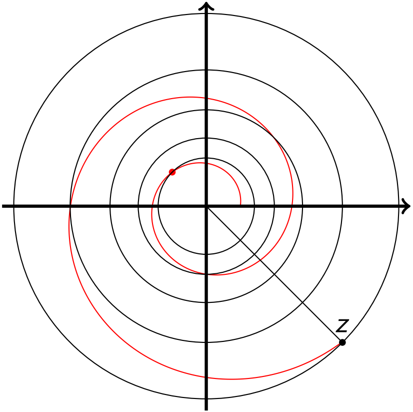
Feladat

Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$



Megoldás.

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;

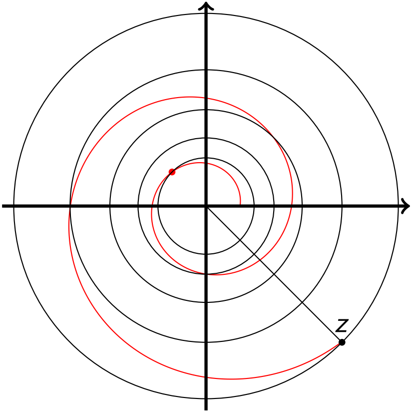


Feladat

Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$

Megoldás.

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;
$\arg z = -\arccos \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = -45^\circ \equiv 315^\circ \pmod{360^\circ}$;



Feladat

Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$

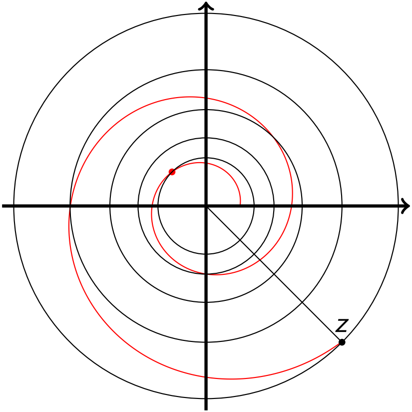
Megoldás.

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;
$\arg z = -\arccos \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = -45^\circ \equiv 315^\circ \pmod{360^\circ}$;
$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{4\sqrt{2}(\cos 315^\circ + \imath \sin 315^\circ)}$

CSAK VÁZLAT (PG)

Feladat

Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$



Megoldás.

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;

$\arg z = -\arccos \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = -45^\circ \equiv 315^\circ \pmod{360^\circ}$;

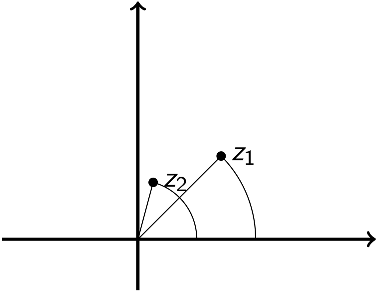
$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{4\sqrt{2}(\cos 315^\circ + \imath \sin 315^\circ)} =$

$\sqrt{2}(\cos(63^\circ + k72^\circ) + \imath \sin(63^\circ + k72^\circ)) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$; $\square$

CSAK VÁZLAT (PG)

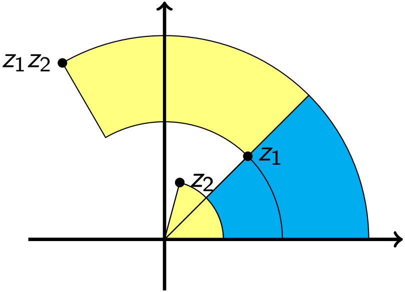
Feladat

Legyen
$z_1 = 2\sqrt{3}(\cos 45^\circ + \imath \sin 45^\circ)$ és
$z_2 = \sqrt{3}(\cos 75^\circ + \imath \sin 75^\circ)$!
Adjuk meg $z_1 z_2$ és $\dfrac{z_1}{z_2}$ algebrai alakját!



Feladat

Legyen
$z_1 = 2\sqrt{3}(\cos 45^\circ + \imath \sin 45^\circ)$ és
$z_2 = \sqrt{3}(\cos 75^\circ + \imath \sin 75^\circ)$!
Adjuk meg $z_1 z_2$ és $\dfrac{z_1}{z_2}$ algebrai alakját!

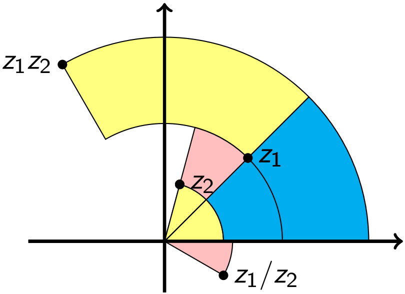


Megoldás.

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{3}\sqrt{3}(\cos[45^\circ + 75^\circ] + \imath \sin[45^\circ + 75^\circ]) =$$
$$6(\cos 120^\circ + \imath \sin 120^\circ) = 6(\frac{-1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}) = -3 + \imath 3\sqrt{3}.$$

Feladat

Legyen
$z_1 = 2\sqrt{3}(\cos 45^\circ + \imath \sin 45^\circ)$ és
$z_2 = \sqrt{3}(\cos 75^\circ + \imath \sin 75^\circ)$!
Adjuk meg $z_1 z_2$ és $\dfrac{z_1}{z_2}$ algebrai alakját!



Megoldás.

$z_1 z_2 = 2\sqrt{3}\sqrt{3}(\cos[45^\circ + 75^\circ] + \imath \sin[45^\circ + 75^\circ]) =$
$6(\cos 120^\circ + \imath \sin 120^\circ) = 6(\frac{-1}{2} + \imath \frac{\sqrt{3}}{2}) = -3 + \imath 3\sqrt{3}.$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(\cos[45^\circ - 75^\circ] + \imath \sin[45^\circ - 75^\circ]) = 2(\cos -30^\circ + \imath \sin -30^\circ) =$
$2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \imath \frac{-1}{2}) = \sqrt{3} - \imath.$ □

CSAK VÁZLAT (PG)

Polinom, azaz racionális egész függvény

Definíció

Ha $k \in \mathbb{N}^+$, és $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $a_k \neq 0$, akkor a

$$p(z) = a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0$$

függvényt k-adfokú (komplex együtthatós) polinomnak nevezzük, míg $a_0, a_1, \ldots, a_k$-t a polinom együtthatóinak, a_k-t a főegyütthatónak hívjuk.
Ha nem tesszük fel, hogy $a_k \neq 0$, akkor legfeljebb k-adfokú polinomról beszélünk.
A konstans függvényeket 0-adfokú polinomnak nevezzük.
Polinomnak vagy racionális egész függvénynek nevezünk egy függvényt, ha k-adfokú polinom valamely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén.
A $p(z)$ polinom gyökének nevezzük a zérushelyeit, azaz azon $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyekre $p(z) = 0$.
A $p(z)$ k-adfokú polinom fokszámát $\deg p(z)$-vel jelöljük, azaz

$$\deg p(z) = k.$$

Bizonyítás nélkül közöljük a következőket.

Tétel (Algebra alaptétele)

Egy $p(z)$ legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak mindig van komplex gyöke.

Következmény

Egy $p(z)$ k-adfokú (nem azonosan nulla) polinomnak pontosan k darab gyöke van, multiplicitással számolva, azaz létezik $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ úgy, hogy

$$p(z) = a_k(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_k),$$

ahol a_k a polinom főegyütthatója.

Megjegyzés

A gyökök nem feltétlenül különbözőek.

Feladat

Határozzuk meg a $p(z)$ polinom gyökeit, ahol

$$p(z) = z^2 - (2+4\imath)z - 3 + 2\imath.$$

Megoldás.

$a = 1$, $b = -2 - 4\imath$ és $c = -3 + 2\imath$ helyettesítéssel alkalmazzuk a megoldó képletet.

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 + 4\imath + \sqrt{(2+4\imath)^2 - 4(-3+2\imath)}}{2}$$

$$\sqrt{(2+4\imath)^2 - 4(-3+2\imath)} = \sqrt{8\imath} = 2\sqrt{2}\sqrt{\imath} = \pm 2(1+\imath),$$

miatt

$$z_{1,2} = 1 + 2\imath \pm (1+\imath),$$

azaz

$$p(z) = (z - \imath)(z - (2+3\imath)).$$ □

CSAK VÁZLAT (PG)