1. feladat (20 pont)
Adja meg az $z^2-(1-2i)z-i-1=0$ egyenlet összes megoldását algebrai alakban!

Mo. $\dfrac{1-2i+\sqrt{(1-2i)^2+4i+4}}{2}=\dfrac{1-2i+\sqrt{1}}{2}$ **(10p)** , vagyis $z_1=1-i$ **(5p)** , $z_2=-i$ **(5p)** .

---

2. feladat (30+30=60 pont)
Határozza meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, limesz inferiorját, illetve határértékét, ha létezik!

$$a_n=\sqrt[n]{\frac{7^n+(-5)^n}{n^3+2}},\qquad b_n=\sqrt{n^3-5n-3}+(-1)^n\sqrt{n^3-2n+6}$$

Mo. Páros n-re a rendőrelv miatt

$$7\overset{\textbf{(2p)}}{\leftarrow}\frac{7}{\sqrt[n]{3}\,(\sqrt[n]{n})^3}\overset{\textbf{(2p)}}{=}\sqrt[n]{\frac{7^n}{3n^3}}\overset{\textbf{(3p)}}{\leq}\sqrt[n]{\frac{7^n+5^n}{n^3+2}}\overset{\textbf{(3p)}}{\leq}\sqrt[n]{\frac{2\cdot 7^n}{n^3}}\overset{\textbf{(2p)}}{=}\frac{7\sqrt[n]{2}}{(\sqrt[n]{n})^3}\overset{\textbf{(2p)}}{\to}7$$

Páratlan n-re a rendőrelv miatt

$$7\overset{\textbf{(1p)}}{\leftarrow}\frac{7}{\sqrt[n]{6}\,(\sqrt[n]{n})^3}\overset{\textbf{(2p)}}{=}\sqrt[n]{\frac{7^n-\frac{7^n}{2}}{3n^3}}\overset{\textbf{(4p)}}{\leq}\sqrt[n]{\frac{7^n-5^n}{n^3+2}}\overset{\textbf{(3p)}}{\leq}\sqrt[n]{\frac{7^n}{n^3}}\overset{\textbf{(2p)}}{=}\frac{7}{(\sqrt[n]{n})^3}\overset{\textbf{(1p)}}{\to}7$$

így $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{7^n+5^n}{n^3+2}}=7$ **(3p)**

Páratlan n esetén

$$\sqrt{n^3-5n-3}+(-1)^n\sqrt{n^3-2n+6}\overset{\textbf{(2p)}}{=}\frac{n^3-5n-3-(n^3-2n+6)}{\sqrt{n^3-5n-3}+\sqrt{n^3-2n+6}}\overset{\textbf{(4p)}}{=}$$
$$=\frac{-3n-9}{\sqrt{n^3-5n-3}+\sqrt{n^3-2n+6}}\overset{\textbf{(6p)}}{=}\frac{n}{n^{3/2}}\cdot\frac{-3-\frac{9}{n}}{\sqrt{1-\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}+\frac{6}{n^3}}}\overset{\textbf{(4p)}}{\to}0.$$

Párosn n esetén

$$\sqrt{n^3-5n-3}+(-1)^n\sqrt{n^3-2n+6}\overset{\textbf{(2p)}}{=}\sqrt{n^3-5n-3}+\sqrt{n^3-2n+6}\overset{\textbf{(4p)}}{\to}\infty,$$

tehát a torlódási pontok halmaza $\{0,\infty\}$ **(2p)** , $\liminf b_n=0$ **(2p)** , $\limsup b_n=\infty$ **(2p)** , és a sorozat nem konvergens **(2p)** .

---

3. feladat (20 pont)
Hol folytonos, hol és milyen típusú szakadása van a következő függvénynek?

$$f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}$$

A szakadási helyeken határozza meg a függvény bal és jobb oldali határértékét!

Mo. $x^2 - 2x = x(x-2)$ **(2p)** , tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ **(2p)** . A függvény folytonos az értelmezési tartományának minden pontjában **(4p)** , mert folytonos függvények hányadosa, és a nevező nem nulla.

$\lim\limits_{x\to 2\pm 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2\pm 0} \frac{\sin(x-2)}{x-2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ **(4p)** , tehát a függvénynek a -2 pontban megszüntethető szakadása van **(2p)** .

$\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \frac{\sin(-2)}{-2} \lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$ **(4p)** , azaz a 0 pontban a függvénynek másodfajú szakadása van **(2p)** .