1. feladat (4+9=13 pont)
a) Ismertesse speciális rendőrelvet! (Bizonyítás nélkül.)
b) Hova tart az $a_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n-4}\right)^{4n^2}$ sorozat?

Mo. *a*) Ha $a_n \to \infty$, és $n \geq N$ esetén $b_n \geq a_n$, akkor $b_n \to \infty$ **(4p)**
b) $\dfrac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{4}{2n}\right)^{2n}} \to \dfrac{e^3}{e^{-4}} = e^7$ **(4p)** , így $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $a_n \geq (e^7-\varepsilon)^{2n} \to \infty$ **(4p)** ,
így a speciális rendőrelv miatt $a_n \to \infty$ **(1p)** .

---

2. feladat (8+10=18 pont)
a) Mit mondhatunk korlátos és monoton sorozat kovergenciájára? Állítását bizonyítsa!
b) Konvergens-e az $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4}$ sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

Mo. *a*) Ha a_n monoton és korlátos, akkor konvergens **(2p)** . Tegyük fel, hogy a_n monoton növő, és legyen $A = \sup(a_n)$, ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N, melyre $a_N > A - \varepsilon$ **(2p)** . Ekkor a monotonitás miatt $n \geq N$ esetén $A - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq A$ **(2p)** , tehát $|a_n - A| < \varepsilon$, így $a_n \to A$. **(2p)**
b) Ha létezik $A = \lim a_n$, akkor $A = \sqrt{5A-4}$, tehát $A = 1$ vagy $A = 4$ **(2p)** . $1 \leq a_1 \leq 4$, és $1 \leq a_n \leq 4$ esetén $1 = \sqrt{5\cdot 1 - 4} \leq a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4} \leq 4 = \sqrt{5 \cdot 4 - 4}$ **(2p)** , tehát a sorozat korlátos **(1p)** . $a_2 = \sqrt{11} > a_1$ **(1p)** , és $a_n < a_{n+1}$ esetén $a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4} < \sqrt{5a_{n+1} - 4} < a_{n+2}$, tehát a sorozat monoton növő. **(2p)** Így a sorozat konvergens, és a határérték csak a felső korlát lehet, vagyis 4. **(2p)**

---

3. feladat (16 pont)
Osztályozza az $f(x) = \dfrac{x}{x+3} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2 - 2x}$ függvény szakadási helyeit!

Szakadási helyek: $0, 2, -3$ **(4p)**
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, mert az arctg függvény korlátos, a szorzat másik tagja pedig 0-hoz tart **(3p)** , így itt megszüntethető szakadás van. **(1p)**
$\lim\limits_{x \to 2\pm} f(x) = \dfrac{2}{5} \cdot \left(\pm \dfrac{\pi}{2}\right)$ **(3p)** , tehát ebben a pontban véges ugrás van. **(1p)**
$\lim\limits_{x \to -3\pm} f(x) = \mp\infty$ **(3p)** , tehát ebben a pontban lényeges szakadás van. **(1p)**

4. feladat (4+9=13 pont)

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

$a)$ Határozza meg f deriváltját!

$b)$ Írja fel az f függvény érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = 3$ pontban.

---

a, $f'(x) = \left((2x+3)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(2x+3)^{-3/2} \cdot 2 = -(2x+3)^{-3/2}$ (4p)

b, $f(x_0) = 9^{-1/2} = \frac{1}{3}$; 2p $\quad f'(x_0) = -9^{-3/2} = -\frac{1}{27}$ 2p

$y_é = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{27}(x-3)$ 3p 2p

5. feladat (13 pont)*

Határozza meg az $f(x) = \dfrac{3}{\operatorname{ch}^2 x} - \dfrac{5-\sqrt{x}}{x^2}$ függvény határozatlan integrálját!

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{3}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{5-\sqrt{x}}{x^2}\,dx = 3\operatorname{th} x + \frac{5}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

4p 4p 4p 1p

---

6. feladat (4+9=13 pont)*

$a)$ Ismertesse a Newton–Leibniz-formulát, valamint a feltételeket melyek mellett igaz!

$b)$ Számolja ki az alábbi integrált

$$\int_0^1 xe^{2x}\,dx.$$

Mo. $a)$ Ha az $[a,b]$ intervallumon f Riemann-integrálható **(1p)** és $f = F'$ **(1p)** , akkor $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ **(2p)** .

b, $\int_0^1 \underset{u}{x}\, \underset{v'}{e^{2x}}\,dx = \left[x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\,dx =$ 4p

$u' = 1 \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{e^2+1}{4}$ 3p 2p

7. feladat (14 pont)*

Használja a $t = \sqrt{x}$ helyettesítést, és számolja ki az $\displaystyle\int \frac{3}{x^{3/2} - 4x^{1/2}}\, dx$ integrált!

Mo. $x = t^2$, $dx = 2tdt$, így a helyettesítés után az integrál $\displaystyle\int \frac{6t\, dt}{t^3 - 4t} = 6 \int \frac{dt}{t^2 - 4}$. **(4p)**

$\displaystyle\frac{1}{t^2 - 4} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2}$ **(2p)** , megkapható, hogy $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$ **(4p)** , így:

$$\int \frac{3}{x^{3/2} - 4x^{1/2}} dx = 6 \left(-\frac{1}{4} \ln|t+2| + \frac{1}{4} \ln|t-2| + c \right)\Bigg|_{t=\sqrt{x}} = \qquad \textbf{(2p)}$$

$$= -\frac{3}{2} \ln\left(\sqrt{x} + 2\right) + \frac{3}{2} \ln\left|\sqrt{x} - 2\right| + c. \qquad \textbf{(2p)}$$

A $*$-os feladatokból legalább 14 pontot el kell érni.