1. feladat (4+9=13 pont)
a) Mondja ki a rendőrelvet! (Bizonyítás nélkül!)
b) Számolja ki az $a_n = \left(\dfrac{3n-5}{3n+6}\right)^{2n^2}$ sorozat határértékét!

Mo. *a*) Ha $a_n \to A$, $b_n \to A$ és $n \geq N$ esetén $b_n \geq c_n \geq a_n$, akkor $c_n \to A$ **(4p)**
b) $\dfrac{\left(1-\frac{5}{3n}\right)^n}{\left(1+\frac{6}{3n}\right)^n} \to \dfrac{e^{-\frac{5}{3}}}{e^2} = e^{-\frac{11}{3}}$ **(2+2+1p)** , és elég nagy n esetén $0 \leq a_n \leq \left(e^{-\frac{11}{3}}\right)^{2n} \to 0$ **(1+2p)** így a rendőrelv alapján $a_n \to 0$ **(1p)** .

---

2. feladat (4+11=15 pont)
a) Rakja sorrendbe az a^n, n^k, n^n, $n!$ nagyságrendeket! (Itt $a > 1$ és $k > 0$ valós állandó, n pedig a sorozatok indexe.)
b) Határozza meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját! Konvergensek a sorozatok?

$$a_n = \frac{n^2 + n(-7)^n}{n! + 2^n} \qquad\qquad b_n = \frac{n! + 2^n}{n^2 + n(-7)^n}$$

Mo. *a*) $n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$ **(4p)**
b) $a_n = \dfrac{n7^n}{n!} \cdot \dfrac{\frac{n}{7^n} + (-1)^n}{1+\frac{2^n}{n!}} = 7 \cdot \dfrac{7^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \dfrac{\frac{n}{7^n} + (-1)^n}{1+\frac{2^n}{n!}}$ **(2p)** . Páros n esetén $\dfrac{\frac{n}{7^n} + (-1)^n}{1+\frac{2^n}{n!}}$ határértéke 1, páratlan n esetén pedig -1 **(2p)** és $\dfrac{7^{n-1}}{(n-1)!} \to 0$ **(1p)** , tehát a sorozat konvergens, egyetlen torlódási pontja van: $0 = \lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$ **(2p)** .
$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ **(1p)** , és $a_n \geq 0$, ha n páros, tehát $b_{2n} \to \infty$ **(1p)** , és $a_n \leq 0$, ha n páratlan, így $b_{2n+1} \to -\infty$ **(1p)** . A torlódási pontok halmaza $\{-\infty, \infty\}$, $\liminf b_n = -\infty$, $\limsup b_n = \infty$, és a sorozat divergens **(1p)** .

---

3. feladat (8+9=17 pont)
a) Mondja ki és bizonyítsa be a reciprokfüggvényre vonatkozó deriválási szabályt!
b) Adja meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = \dfrac{\ln(2x+4)}{x+2}$ függvény monoton! Milyen lokális szélsőértékhelyei vannak a függvénynek?

Mo. *a*) $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = \dfrac{-f'}{f^2}$ **(2p)** (Ahol f deriválható, és értéke nem 0.) **(1p)**

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h} = \qquad \textbf{(2p)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{hf(x)f(x+h)} = \qquad \textbf{(2p)}$$
$$= \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

A határérték számításánál felhasználtuk, hogy ha f deriválható egy pontban, akkor ott folytonos is. **(1p)**

b) $D_f = (-2,\infty)$ **(1p)** , $f'(x) = \dfrac{\frac{2(x+2)}{2x+4} - \ln(2x+4)}{(x+2)^2} = \dfrac{1-\ln(2x+4)}{(x+2)^2} = 0$ **(3p)** , ha $x = \frac{e-4}{2}$ **(2p)** , így a függvény monoton növő a $\left(-2, \frac{e-4}{2}\right)$ intervallumon, és monoton csökkenő a $\left(\frac{e-4}{2}, \infty\right)$ intervallumon. **(2p)** . Az $x = \frac{e-4}{2}$ pontban lokális maximum van **(1p)** .

---

4. feladat (4+11=15 pont)
a) Mondja ki a l'Hospital szabályt! (Bizonyítás nélkül.)
b) Osztályozza az $f(x) = \dfrac{|x-2|\operatorname{arctg} x}{x^3+x^2-6x}$ függvény szakadási helyeit!

Mo. *a)* Legyen f, g differenciálható x_0 egy pontozott környezetében, itt $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ és $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Ha $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, akkor $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$. **(4p)**

b) Szakadási helyek a nevező zérushelyei: $0, 2, -3$ **(2p)** .

$\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{|0-2|}{0^2+0-6}\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{3}$ **(2p)** , tehát itt a függvénynek megszüntethető szakadása van **(1p)** .

$\lim_{x\to 2\pm} f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} 2}{2^2+3\cdot 2}\lim_{x\to 2\pm}\dfrac{|x-2|}{x-2} = \pm\dfrac{\operatorname{arctg} 2}{10}$ **(2p)** , tehát itt a függvénynek véges ugrása van **(1p)** .

$\lim_{x\to -3\pm} f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(-3)}{(-3)^2-2\cdot(-3)}\lim_{x\to 2\pm}\dfrac{1}{x+3} = \mp\infty$ **(2p)** , tehát itt a függvénynek lényeges szakadása van **(1p)**

---

5. feladat (10 pont)*
Határozza meg az $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{x^3} - \dfrac{3}{\sqrt{1-4x^2}}$ függvény határozatlan integrálját!

Mo. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int 2x^{-3} - x^{-5/2} - \frac{3}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}x^{-3/2} - \frac{3}{2}\arcsin(2x) + c$

(az átalakításokért **(4p)** , utána minden integrálért **(2p)**)

---

6. feladat (4+11=15 pont)*

a) Ismertesse a helyettesítéses integrálás módszerét határozott integrálra! (Bizonyítás nélkül.)

b) Megfelelő helyettesítéssel adja meg az $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$ integrált!

Mo. *a*) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(t)\big)\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t$ **(4p)**

b) A $t=\sqrt{x}$ helyettesítést alkalmazva $x=t^2=\varphi(t)$, és $\varphi'(t)=2t$ **(3p)**

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \int_0^2 \frac{t}{t^2+1}\cdot 2t\,dt = 2\int_0^2 1-\frac{1}{t^2+1}\,dt = \quad \mathbf{(3+2p)}$$

$$= [2t-2\operatorname{arctg} t]_0^2 = 4-2\operatorname{arctg} 2 \quad \mathbf{(2+1p)}$$

---

7. feladat (4+11=15 pont)*

a) Ismertesse a parciális integrálás módszerét! (Bizonyítás nélkül.)

b) Számolja ki a $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$ integrált!

Mo. *a*) $\displaystyle\int f'g = fg - \int fg'$ **(4p)**

b) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx \overset{(\mathbf{3p})}{=} -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx \overset{(\mathbf{3p})}{=} -(1+x)e^{-x}$

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx \overset{(\mathbf{1p})}{=} -\lim_{\omega\to\infty}\big[(1+x)e^{-x}\big]_0^\omega \overset{(\mathbf{1p})}{=} -\lim_{\omega\to\infty}\frac{1+\omega}{e^\omega}+1 \overset{(\mathbf{2p})}{=} -\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{e^\omega}+1 \overset{(\mathbf{1p})}{=} 1$$
