

1. feladat (5+10=15 pont)

a) Hogyan kaphatjuk meg egy z komplex szám n -edik gyökeit? (Adja meg a formulát tetszőleges n pozitív egész szám esetén!)

b) Adja meg algebrai alakban az $iz^2 + 2(\sqrt{3} - i) = 0$ egyenletnek az összes megoldását!

a) Ha a $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ a szám trigonometrikus alakja (**1p**), akkor z n darab n -edik gyöke $z_1, \dots, z_n$ (**1p**) ahol $z_j = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + (j-1)2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + (j-1)2\pi}{n} \right)$, $j = 1, \dots, n$ (**3p**)

b) $z^2 \stackrel{1p}{=} \frac{-2(\sqrt{3} - i)}{i} \stackrel{2p}{=} 2i(\sqrt{3} - i) \stackrel{1p}{=} 2(1 + \sqrt{3}i) \stackrel{2p}{=} 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, így
 $z_1 \stackrel{1p}{=} 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \stackrel{1p}{=} \sqrt{3} + i$, $z_2 \stackrel{1p}{=} 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \stackrel{1p}{=} -\sqrt{3} - i$.

2. feladat (14 pont)

Legyen $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 8 - \frac{15}{a_n}$ rekurzíve adott sorozat! Mutassa meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $3 \leq a_n \leq 5$ teljesül! Indokolja meg, hogy (a_n) konvergens, és határozza meg a határértékét!

Teljes indukcióval bizonyítunk. (**1p**)

I. $3 \leq a_1 = 4 \leq 5$ (**1p**)

II. $3 \leq a_n \leq 5 \stackrel{1p}{\Rightarrow} 5 \geq \frac{15}{a_n} \geq 3 \stackrel{1p}{\Rightarrow} -5 \leq -\frac{15}{a_n} \leq -3 \stackrel{1p}{\Rightarrow} 3 = 8 - 5 \leq a_{n+1} \leq 8 - \frac{15}{a_n} \leq 8 - 3 = 5$.

$a_2 = 5\frac{17}{4} > 4 = a_1$, teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy (a_n) monoton növekvő. (**1p**)

I. $a_2 > a_1$ (**1p**)

II. Az előbb bizonyított alsó korlát miatt $a_n \geq 0$, így

$a_{n+1} > a_n \stackrel{1p}{\Rightarrow} \frac{15}{a_{n+1}} < \frac{15}{a_n} \stackrel{1p}{\Rightarrow} -\frac{15}{a_{n+1}} > -\frac{15}{a_n} \stackrel{1p}{\Rightarrow} a_{n+2} = 8 - \frac{15}{a_{n+1}} > 8 - \frac{15}{a_n} = a_{n+1}$

A sorozat tehát monoton növekvő és korlátos, így konvergens, vagyis létezik $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (**2p**). Ekkor $A = 8 - \frac{15}{A}$, tehát $A^2 - 8A + 15 = 0$. Ebből $A = 3$ vagy $A = 5$, de mivel $a_n \geq 4$, így $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$ (**2p**)

3. feladat (12 pont)

Hol és milyen típusú szakadása van az $f(x) = \arctg \frac{1}{x+1} + x \operatorname{arcctg} \frac{3}{x}$ függvénynek?

f folytonos függvények hányadosának kompozíciója, illetve ezek összege, így csak ott lehet szakadása, ahol a nevező 0. (**2p**)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{1p}{=} \arctg(1) + \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arcctg} \frac{3}{x} \stackrel{3}{=} \frac{2p}{4} \frac{\pi}{4},$$

mert az összeg második tagja az $\arctg$ függvény korlátossága miatt egy 0-hoz tartó és egy korlátos kifejezés szorzata, így 0-hoz tart **(1p)**. A 0 pontban tehát a függvénynek megszüntethető szakadása van. **(1p)**

$$\lim_{x \rightarrow -1 \pm} f(x) \stackrel{4p}{=} \arctg 3 \pm \frac{\pi}{2},$$

így az függvénynek az -1 pontban véges ugrása van. **(1p)**

4. feladat (8+12=20pont)

a) Mondja ki és igazolja a szorzatfüggvény deriválási szabályát!

b) Keresse meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = xe^{-5x^2}$ függvény konvex, illetve konkáv! Hol van inflexiója az f függvénynek?

a) Ha f és g differenciálható egy x_0 pontban, akkor a szorzatuk is differenciálható, és $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ **(2p)**, mert

$$\begin{aligned} (fg)'(x_0) &\stackrel{1p}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0)}{h} \stackrel{1p}{=} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0 + h)g(x_0) + f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} \stackrel{2p}{=} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \stackrel{1p}{=} \\ &= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0), \end{aligned}$$

hiszen ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor ott folytonos is **(1p.)**

b) $f''(x) \stackrel{3p}{=} \left(e^{-5x^2} - 10x^2 e^{-5x^2} \right)' = \left((1 - 10x^2)e^{-5x^2} \right)' \stackrel{3p}{=} -20xe^{-5x^2} - 10x(1 - 10x^2)e^{-5x^2} =$
 $-10x(3 - 10x^2)e^{-5x^2} = 0$ ha $x = 0$ vagy $x = \pm \sqrt{\frac{3}{10}}$. **(2p)** Így

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}} \right)$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0 \right)$	0	$\left(0, \sqrt{\frac{3}{10}} \right)$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{10}}, \infty \right)$	
f''	–	0	+	0	–	0	+	(4p)
f	$\cap$	IP	$\cup$	IP	$\cap$	IP	$\cup$	

5. feladat (6+7=13 pont)

(a) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 5}} dx = ?$

(b) $\int (3x + 1)e^{2x} dx = ?$

(a) Az integrandus $f' \cdot f^{-1/2}$ alakú (3p), így

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}} dx = \int 2x(x^2+5)^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x^2+5} + c \quad (3p)$$

(b) Parciális integrálással dolgozunk (1p)

$$\int (3x+1)e^{2x} dx = (3x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int 3\frac{1}{2}e^{2x} = \quad (3p)$$

$$= \frac{3x+1}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + c \quad (3p)$$

6. feladat (4+10 pont)

a) Mondja ki a Newton-Leibniz tételt!

b) Számolja ki az $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 x \cos^2 x dx$ integrált!

a) Ha $f \in \mathcal{R}[a, b]$ és $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$ esetén, akkor $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

(4p)

b) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, (1p) tehát

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^2 x dx &\stackrel{1p}{=} \\ &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x dx \stackrel{2p}{=} \int \sin x \cos^2 x dx - \int \sin x \cos^4 x dx \stackrel{2p}{=} \\ &= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

használva, hogy $\alpha \neq -1$ esetén $\int f^\alpha f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha} + c$. (1p) A Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 x \cos^2 x dx \stackrel{2p}{=} -\frac{\cos^3 0}{3} + \frac{\cos^5 0}{5} - \left(-\frac{\cos^3(-\frac{\pi}{2})}{3} + \frac{\cos^5(-\frac{\pi}{2})}{5} \right) \stackrel{1p}{=} -\frac{1}{3} + \frac{1}{5}.$$

7. feladat (12 pont)

Számolja ki az $\int_4^\infty \frac{2}{x^2-9} dx$ integrált!

$$\int_4^\infty \frac{2}{x^2-9} dx \stackrel{1p}{=} 2 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_4^\omega \frac{1}{x^2-9} dx. \text{ Ehhez}$$

$$\frac{1}{x^2-9} \stackrel{2p}{=} \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \stackrel{1p}{=} \frac{AX+3A+Bx-3B}{x^2-9},$$

vagyis $A + B = 0$, $A - B = \frac{1}{3}$, tehát $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{6}$, **(3p)** így

$$\begin{aligned} \int_4^\infty \frac{2}{x^2 - 9} dx &\stackrel{\text{1p}}{=} 2 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \int_4^\omega \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) dx \stackrel{\text{2p}}{=} \\ &= \frac{2}{6} \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\ln(x-3) - \ln(x+3)]_4^\omega \stackrel{\text{1p}}{=} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln \frac{\omega-3}{\omega+3} - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{7} \stackrel{\text{1p}}{=} \frac{1}{3} \ln 7 \end{aligned}$$
