ANALÍZIS 1. vizsgakurzus — 1. VIZSGADOLGOZAT — 2024. június 11.
Mérnök-informatikus szak — BME, Mat. Int., Analízis Tsz. — Munkaidő: 90 perc

1*. feladat (9+9+9=27 pont)

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\cos(x)\,dx = ? = \left[\frac{\sin^4(x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}$ 6 3

b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = ? = \frac{1}{4}\lim_{\Omega\to\infty}\int_0^{\Omega}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\lim_{\Omega\to\infty}\left[2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\Omega} =$ 2 2 3

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$ 2

c) $\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = ? = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2}\left(\ln|x+2| + \ln|x-2|\right) + c$ 2 2

$\frac{x}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow x = A(x-2) + B(x+2) \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$ 2 3

VAGY: $\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + c$ 4

5 f'/f alak

2*. feladat (5+8=13 pont)

a) Mondja ki a Newton-Leibniz tételt!

Ha $f\in R[a,b]$, 1 és $\exists F: F'(x) = f(x)\ \forall x\in[a,b]$, 2 akkor

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ 2

b) Milyen p-re konvergens $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = ?$ Állítását bizonyítsa!

T: $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ konv. $\iff p > 1$ 3

B.: $p=1$-re $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\Omega\to\infty}\left[\ln x\right]_1^{\Omega} = +\infty$ div. 2

$p\neq 1$-re $\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{\Omega\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\Omega} = \begin{cases}\infty, & \text{ha } 1-p>0, \text{ azaz } p<1\\ \frac{1}{p-1}, & \text{ha } 1-p<0, \text{ azaz } p>1\end{cases}$ 3

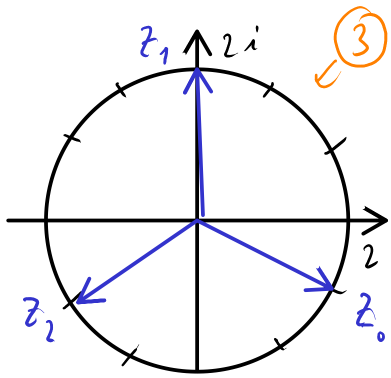
3. feladat (12 pont)
Határozza meg a $(-iz)^3 = 8$ egyenlet összes komplex megoldását algebrai alakban! Készítsen egy ábrát a gyökök elhelyezkedéséről!

$$(-iz)^3 = \underbrace{(-i)^3}_{+i} z^3 = 8 \Rightarrow z^3 = -8i = 8\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$$ 3

$$z_k = \sqrt[3]{8}\cdot e^{-i\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}ki} = 2\cdot e^{i\frac{4k\pi-\pi}{6}}$$ 3

$$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}-i;\quad z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i;$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3}-i$$ 3



4. feladat (8+4=12 pont)

a) Mondja ki és igazolja a függvények szorzatára vonatkozó deriválási szabályt!

3. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 2

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\downarrow\ f'(x)}\ \underbrace{g(x+h)}_{\downarrow\ g(x)}\ +\ \underbrace{f(x)}_{\downarrow\ f(x)}\ \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\downarrow\ g'(x)}\right)
\end{aligned}$$

$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ (határérték = helyettesítési érték) oka:

g deriválható x-ben $\Longrightarrow$ g folytonos x-ben

6

b) Adja meg x^x deriváltját!

$$x^x = e^{x\ln x}$$ 2

$$(x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = (x\ln x)'\, e^{x\ln x} = (\ln x + 1)\, x^x$$ 2

5. feladat (8+8=16 pont)

a) $\lim_{x\to\infty}\cos(\pi x)(\sqrt{x^2+x}-x) = ?$ cos(πx) oszcillál, a limesz ∄ 3

$$\sqrt{x^2+x}-x = \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{1}{2}$$ 3 2

b) $\lim_{x\to\infty}\cos(\pi x)(\sqrt{x^2+1}-x) = ?$

$$\sqrt{x^2+1}-x = \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x} \xrightarrow{x\to\infty} 0,$$ 2 2

cos(πx) korlátos, így a limesz 0. 2 2

6. feladat (20 pont)

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$$

Végezze el a függvény teljes vizsgálatát (értelmezési tartomány, értékkészlet, határértékek $\pm\infty$-ben, monotonicitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, inflexiós pontok)! Ábrázolja a függvényt!

$D_f = \mathbb{R}$; f folytonos $\mathbb{R}$-en; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ 3

7

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1) = 0 \iff x = -2$, vagy $x = +1$

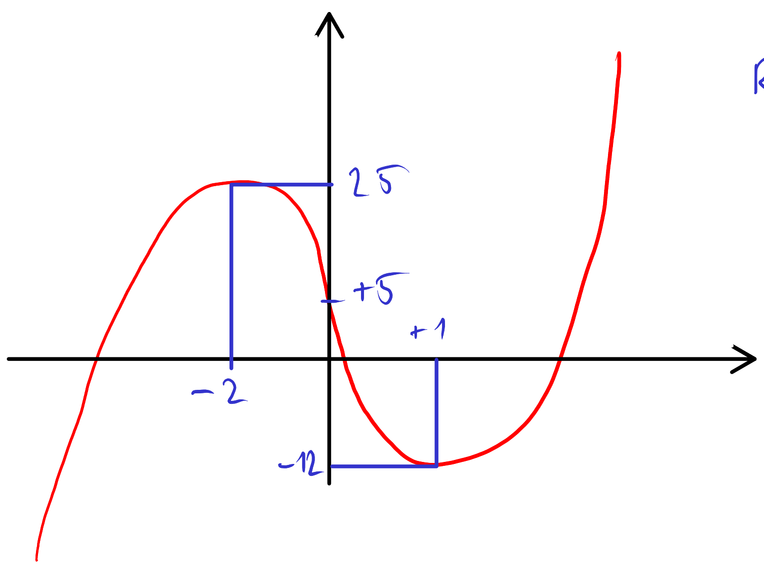
x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$1 < x$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

$f''(x) = 12x + 6 = 6(2x+1) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$

x	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl. pont	$\cup$

6

$f(-2) = -16 + 12 + 24 + 5 = 25$; $f(0) = +5$; $f(+1) = -12$



$R_f = \mathbb{R}$

4