Analízis 2 informatikusoknak (BMETE90AX57) tételsor

2024. május

Általános információk

- Az írásbeli vizsga egy tesztből és egy kifejtős kérdéssorból áll. A kifejtős rész $*$-gal jelölt feladatainak tematikája a tárgy végén levő anyagrész, amely az adott féléves zárthelyiken nem került számonkérésre. (Többváltozós integrálás, Fourier-sorok, Fourier-transzformáció.) **Ebben a részben külön el kell érni a feladatsoron meghatározott pontszámot (30-40%-ot) az elégséges jegyhez.**
- Az írásbeli vizsgán csak a jegyzetben található deriválttáblázat vagy azzal azonos információtartalmú táblázat használható, más segédeszköz (pl. számológép) nem.
- Alapértelmezésként minden, a tananyagban előforduló definíciót és állítást ismerni kell a vizsgán. Ezen kívül bizonyos tételek bizonyítását is tudni kell ismertetni. Ezt pontosítja az alábbi tételsor. **A bizonyítással együtt számonkért tételeket, állításokat vastag szedéssel jelöljük.**

Tételek

1. Differenciáalegyenletek (d.e.) bevezetése, elsőrendű d.e.-ek

Differenciálegyenlet fogalma, osztályozásuk. Megoldás, általános megoldás, partikuláris megoldás, kezdetiérték-feladat. Szétválasztható változójú d.e.-ek megoldása. Elsőrendű lineáris d.e.-ek. **Az elsőrendű homogén lineáris d.e.-ek megoldásai** egydimenziós **vektorteret alkotnak. Elsőrendű inhomogén lineáris d.e. általános megoldásának alakja (két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek).** Az állandó variálásának módszere. Új változó bevezetése (spec.: $u = y/x$ és $u = ax + by$). Vonalelem, iránymező, izoklina. Partikuláris megoldás lokális vizsgálata a d.e.-hez tartozó iránymezőben, az izoklinák módszere. A d.e. megoldásait közelítő Taylor-polinomok számolása.

2. Magasabbrendű lineáris d.e.-ek

Lineáris d.e. fogalma. (Állandó/függvény-együtthatós, homogén/inhomogén.) **Az n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai** n-dimenziós

vektorteret alkotnak. Az n-edrendű homogén lineáris, konstans együtthatós differenciálegyenletnek létezik $e^{\lambda x}$ alakú megoldása. Karakterisztikus polinom. Az általános megoldás alakja. Wronski-determináns. A homogén egyenlet megoldásai lineáris függetlenségének eldöntése a Wronski-determináns segítségével.

Az n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának alakja. **Két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek.** Az n-edrendű inhomogén lineáris d.e. partikuláris megoldásának keresése speciális jobb oldali zavaró függvény esetén próbafüggvénnyel.

3. Lineáris rekurzió

Lineáris rekurzió fogalma, alakja. **A k-adrendű lineáris rekurzióval generált sorozatok k-dimenziós vektorteret alkotnak.** A q^n mértani sorozat teljesíti a rekurziót (karakterisztikus-egyenlet). Bázis megadása egy adott lineáris rekurziót kielégítő sorozatok terében. A sorozat első k eleme egyértelműen meghatározza a sorozatot. A Fibonacci-sorozat és annak explicit alakja (a rekurzió feloldása). Fibonacci-típusú sorozatok.

4. Numerikus sorok

Numerikus sor fogalma. Konvergencia, divergencia, numerikus sor összege. **A harmonikus sor divergens. Végtelen mértani sor összege.** Sorok összege és konstansszorosa. Cauchy-kritérium, mint a sorok konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele. **A konvergencia szükséges feltétele ($a_k \to 0$).** Leibniz-kritérium váltakozó előjelű sorokra, hibabecslés. Abszolút konvergencia és **kapcsolata a konvergenciával.** Konvergencia-kritériumok pozitív tagú sorokra: **majoráns- és minoráns kritériumok, hányados- és gyökkritérium**, ezek határértékes alakja, integrál-kritérium. **A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ sor konvergenciájának feltétele.**

5. Függvénysorozatok, függvénysorok

Függvénysorozat fogalma, konvergencia-tartománya. Egyenletes konvergencia fogalma. Az egyenletes konvergencia következménye a határértékre, deriválhatóságra és integrálhatóságra.

Függvénysor fogalma, konvergencia-tartománya. Egyenletes konvergencia. Cauchy-kritérium függvénysorokra. **Weierstrass-kritérium függvénysorokra az egyenletes és abszolút konvergencia biztosítására.** Az egyenletes konvergencia következménye a határértékre, az integrálhatóságra és a deriválhatóságra vonatkozóan.

6. Hatványsorok

Hatványsor fogalma, konvergenciája. **Egy adott pontban konvergens ill. divergens hatványsor tulajdonságai.** Konvergencia-tartomány fogalma, alakja. Konvergencia-sugár. Konvergencia-sugár meghatározása hányados- és gyökkritériummal. **Hatványsor abszolút és egyenletes konvergenciája.** Hatványsor összegfüggvényének folytonossága. Hatványsor összegföggvényének integrálja.

Hatványsor tagonkénti deriválásával nyert sor konvergencia-sugara. Hatványsor összegfüggvényének deriválhatósága, a derivált hatványsora.

Egy függvényt az x_0 pontban n-ed rendben érintő, legfeljebb n-ed fokú polinom egyértelműsége (Taylor-polinom). Taylor-sor fogalma. Lagrange-féle maradéktag alakja. **Elégséges feltétel arra, hogy egy függvény Taylor-sora megegyezzen a függvénnyel.** A hatványsor alak egyértelműsége. A geometriai sorból levezethető Taylor-sorok. Az $\ln(1+x)$, $\arctan x$ függvények megegyeznek a Taylor-soraikkal a $(-1,1)$-en. Az e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ és a $\operatorname{ch} x$ függvény megegyezik a Taylor-sorával $(-\infty,\infty)$-en. Binomiális sor, összegfüggvénye és konvergencia-sugara. Az $f(x) = \arcsin x$ függvény megegyezik a Taylor-sorával a $(-1,1)$-on. Alkalmazások: függvényérték közelítő értékének számolása, a hiba becslése, határérték meghatározása.

7. Többváltozós függvények határértéke és deriválása

Többváltozós függvények értelmezése, grafikon, szemléltetésük. Távolság, környezet fogalma; belső-, külső-, határpont, torlódási pont, zárt és nyílt halmazok, kompakt halmaz, korlátos halmaz. Pontsorozat és konvergenciája.

Többváltozós függvények határértéke és folytonossága. Ezek átviteli-elves megfogalmazása. Műveletek és a folytonosság kapcsolata, összetett függvény folytonossága. Parciális derivált fogalma. A totális derivált, gradiensvektor. **A totális derivált létezésének szükséges feltételei.** Egy elégséges feltétel.

8. A deriválás alkalmazásai

Totálisan deriválható függvény érintősíkja, teljes differenciálja, **iránymenti derivált és kiszámítása**. Gradiensvektor tulajdonságai. Melyik irányban legnagyobb ill. legkisebb az iránymenti derivált és mekkora? Magasabbrendű parciális deriváltak. Young-tétel. Lokális szélsőérték definíciója, **szükséges feltétele parciálisan deriválható függvény esetén**. A lokális szélsőérték elégséges feltétele kétváltozós függvényekre, Hesse-mátrix. Abszolút szélsőérték fogalma, meghatározása, Weierstrass-tétel. Összetett függvény deriválása.

9. Többváltozós függvények integrálása

Integrálás téglalapon. Az integrál értelmezése. Kiszámítása a Fubini-tétellel. Elégséges feltétel az integrál létezésére. Fubini-tétel speciális esete $f(x,y) = g(x)h(y)$ alakú függvényekre. Az integrál értelmezése tetszőleges korlátos halmazon. Normáltartományok és az integrál kiszámítása normáltartományon. Kettősintegrál transzformációja. Síkbeli polár koordinátarendszer, és **Jacobi-determinánsa**. Hármasintegrál kiszámítása téglatesten, normáltartományon és helyettesítéssel (gömbi ill. hengerkoordináták, és **Jacobi-determinánsuk**).

10. Fourier-sor és Fourier-transzformáció

A trigonometrikus rendszer **ortogonalitása**, lineáris függetlensége, teljessége. Az egyenletesen konvergens trigonometrikus sor együtthatóinak egyértelműsége. (Kapcsolat az összegfüggvény és az együtthatók között.) A Fourier-együtthatók kiszámítása. Összeg, konstansszoros Fourier-sora. Páros és páratlan függvény Fourier-sora. Elégséges feltétel Fourier-sor egyenletes konvergenciájára. Dirichlet-tétel (Fourier-sor pontonkénti konvergenciája.)

Függvények Fourier-transzformáltja. A Fourier-transzformált tulajdonságai. **Műveleti szabályok (linearitás, dilatáció, eltolás, moduláció,** differenciálás. Konvolúció, **kommutativitása**. Konvolúció Fourier-transzformáltja.