1. feladat (21 pont)
Oldjuk meg az
$$xy^2y' = x^3 + y^3 \quad (x \neq 0,\, y \neq 0)$$
differenciálegyenletet az $y(1) = 1$ kezdeti feltétel mellett. A megoldást explicit alakban adjuk meg.

Mo. Átrendezve:
$$y'(x) = \frac{x^2}{y^2(x)} + \frac{y(x)}{x} \quad (\mathbf{2p}).$$
Legyen $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ **(2p)** . Ekkor
$$y'(x) = u'(x)x + u(x) \quad (\mathbf{1p}),$$
tehát az új differenciálegyenlet:
$$u'(x) = \frac{1}{xu^2(x)} \quad (\mathbf{2p}).$$
Szeparálható, a tanult módszerrel:
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u^2x} \quad \Longrightarrow \quad \int u^2\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{u^3(x)}{3} = \ln|x| + \widetilde{C} \quad (\widetilde{C} \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}),$$
tehát az eredeti egyenlet megoldása:
$$y(x) = x\sqrt[3]{3\ln|x| + C} \quad (\mathbf{4p}).$$
A megadott kezdeti feltétel melletti megoldást jelölje $\widetilde{y}$, ekkor:
$$\widetilde{y}(1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1 \quad (\mathbf{1p}) \qquad \Longrightarrow \quad \widetilde{y}(x) = x\sqrt[3]{3\ln(x) + 1} \quad (\mathbf{1p}) \quad (x > 0) \quad (\mathbf{1p}).$$

---

2. feladat (18 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.
$$xy' = 2y + x^3\sin(x)$$

Mo. Átrendezve:
$$y' - \frac{2y}{x} = x^2\sin(x) \quad (\mathbf{2p}).$$
Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:
$$y' - \frac{2y}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{h,á}(x) = Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (\mathbf{6p}).$$
(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)x^2$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:
$$\underbrace{c'(x)x^2 + 2c(x)x}_{y'(x)} - \underbrace{2c(x)x}_{\frac{2y(x)}{x}} = x^2\sin(x) \quad (\mathbf{2p}).$$
Ebből pedig $c'(x) = \sin(x)$.
$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p}),$$
tehát a $D = 0$ választással $c(x) := -\cos(x)$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:
$$y_{i,p}(x) = c(x)x^2 = -x^2\cos(x) \quad (\mathbf{1p}).$$
Amiből az általános megoldás:
$$y_{i,á}(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} -x^2\cos(x) + Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' - y = e^x(2x+3)$$

Mo. Másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = \pm 1$ **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = (Ax^2 + Bx)e^x \quad (x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

alakban keressük (rezonancia miatt). Deriválva kétszer **(2p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= (Ax^2 + Bx)e^x & &| \cdot (-1) \\ y'(x) &= (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x & &| \cdot 0 \\ y''(x) &= (Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B)e^x & &| \cdot 1. \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - y(x) = (4Ax + 2A + 2B)e^x = (2x+3)e^x \quad (\mathbf{1p})$$

$$\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}). \end{aligned}$$

4. feladat (8+7+7=22 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2} \qquad b) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2 \cdot 5^n}{(n+1)!} \qquad c) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3+2^n}{n^2+5^n}$$

Mo. *a)* Legyen $a_n := (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{e}{e^3} = \frac{1}{e^2} < 1 \quad (\mathbf{1p}),$$

azaz a gyökkritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ abszolút konvergens **(1p)** , tehát konvergens **(1p)** .

b) Legyen $b_n := \frac{n^2 \cdot 5^n}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$.
Ekkor

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{(n+1)^2 5^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^2 \cdot 5^n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{5(n+1)^2}{n^2(n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1 \quad (\mathbf{2p}).$$

Tehát a hányadoskritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := \frac{3+2^n}{n^2+5^n} \quad (n \in \mathbb{N})$.
Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 \leq c_n \leq \frac{4 \cdot 2^n}{5^n} = 4\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad (\mathbf{5p}),$$

és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 4\left(\frac{2}{5}\right)^n$ konvergens, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ konvergens **(2p)** .

---

5. feladat (7+12=19 pont)
a) Milyen sorokat nevezünk Leibniz-típusú soroknak? Mit mond ki a Leibniz-kritérium? Hogyan becsülhetjük egy Leibniz-sor hibáját? (Bizonyítás nélkül mondjuk ki a tanult állításokat.)
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét az $S_{99} := \sum\limits_{n=0}^{99} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$ részletösszeggel közelítjük.

Mo. a) *Lebiniz-sor definíciója:* Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor **Leibniz-sor**, ha a következő tulajdonságok teljesülnek rá.

(i) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+1} \cdot a_n \leq 0$ (azaz **alternál**). **(1p)**
(ii) Az $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton csökkenő. **(1p)**
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. **(1p)**

(Ha az első két tulajdonság egy küszöbindextől kezdve teljesül, akkor $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$-et **tágabb értelemben vett Leibniz-sornak** nevezzük.)
Leibniz-kritérium: Minden (tágabb értelemben vett) Leibniz-sor konvergens. **(2p)**
Ha $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ Leibniz-sor, és $S \in \mathbb{R}$ jelöli a sor összegét, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - S\right| \leq |a_{n+1}| \quad (\mathbf{2p}).$$

b) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$. Ekkor $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ alternál **(1p)** , $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ **(2p)**, illetve

$$|a_{n+1}| \leq |a_n| \overset{(\mathbf{1p})}{\Leftrightarrow} \frac{n+1}{(n+1)^2+2} \leq \frac{n}{n^2+2} \overset{(\mathbf{1p})}{\Leftrightarrow} n^3+n^2+2n+2 \leq n^3+2n^2+3n \overset{(\mathbf{1p})}{\Leftrightarrow} 2 \leq n^2+n$$

ami $n \geq 1$ esetén mindig teljesül **(1p)** , tehát a Leibniz-kritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(2p)**.
Hibabecslés: Szintén a Leibniz-kritérium alapján, ha S jelöli a sor összegét, akkor

$$|S_{99} - S| \leq |a_{100}| = \frac{100}{10002} \quad (\mathbf{3p}).$$

6. feladat (plusz 10 pontért)

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan pozitív tagú számsorozatok, amelyekre teljesül, hogy $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, és a határtéktéke pozitív szám. Mit mondhatunk a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sor konvergenciájáról, ha

a) a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens,

b) a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor divergens?

Mo. Legyen $c := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. A feladat feltételei alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$\frac{c}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b_n \overset{(*)}{\leq} \frac{2a_n}{c} \overset{(**)}{\leq} 3b_n. \quad (\mathbf{6p})$$

Ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{2a_n}{c}$ sor szintén, tehát a $(*)$ egyenlőtlenség és a majoráns kritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sor is konvergens. **(2p)**

Ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor divergens, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{2a_n}{c}$ sor szintén, tehát a $(**)$ egyenlőtlenség és a minoráns kritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sor is divergens. **(2p)**