1. feladat (12+8=20 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{2x(y^2+1)}{x^2+1}$$

b) Rajzoljuk fel az

$$y' = y^2 - x + 1$$

differenciálegyenlet $K = 1$-hez tartozó izoklináját, és jelöljünk be rajta két vonalelemet!

Mo. *a*) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(y^2+1)}{x^2+1} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p})$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg}(y) + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+1) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Tehát a megoldások:

$$\operatorname{arctg}(y(x)) = \ln(x^2+1) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

b) A $K = 1$-hez tartozó izoklina az $x = y^2$ egyenletű parabola **(5p)** , a vonalelemek 1 meredekségűek **(3p)** .

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az

$$y' = (2y - 2x)^2 + 1$$

differenciálegyenletet az $y(0) = -1$ kezdeti feltétel mellet! (A megoldást explicit alakban adjuk meg.)

Mo. Legyen $u(x) := 2y(x) - 2x$ **(2p)** . Ekkor

$$u'(x) = 2y'(x) - 2 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{u'(x)}{2} + 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az új differenciálegyenlet:

$$u' = 2u^2 \quad (\mathbf{2p})$$

Szeparálható, $u \equiv 0$ megoldás **(1p)**. A tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2u^2 \quad \Longrightarrow \quad \int u^{-2}\,\mathrm{d}u = \int 2\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}) \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{u(x)} = 2x + \widetilde{C} \quad (\widetilde{C} \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát az eredeti egyenlet megoldásai:

$$y(x) = x - \frac{1}{4x - C} \quad (\mathbf{4p}) \quad \text{és} \quad y(x) = x \quad (\mathbf{1p})$$

A megadott kezdeti feltétel melletti megoldást jelölje $\widetilde{y}$, ekkor:

$$\widetilde{y}(0) = -1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1 \quad (\mathbf{1p}) \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{y}(x) = x + \frac{1}{1 - 4x} \quad (\mathbf{2p}) \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}\right).$$

---

3. feladat (20 pont)

Adjuk meg az

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y'' = 18e^{2x}$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

Mo. Negyedrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = -1$ **(2p)**. Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,\acute{a}}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük az $y(x) = Ae^{2x}$ alakban **(2p)** $(x \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R})$ (nincs rezonancia). Deriválva négyszer **(3p)**:

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{2x} & &| \cdot 0 \\ y'(x) &= 2Ae^{2x} & &| \cdot 0 \\ y''(x) &= 4Ae^{2x} & &| \cdot 1 \\ y^{(3)}(x) &= 8Ae^{2x} & &| \cdot 2 \\ y^{(4)}(x) &= 16Ae^{2x} & &| \cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$36Ae^{2x} = 18e^{2x} \quad (\mathbf{2p}) \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p})$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{i,\acute{a}}(x) = y_{i,p}(x) + y_{h,\acute{a}}(x) =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(2p)}$$

---

4. feladat (7+7+7=21 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{2^{n+3}}{(3+\sqrt[n]{n})^n} \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{n+2}{n+3} \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{n!}$$

Mo. *a)* Legyen $a_n := \dfrac{2^{n+3}}{(3+\sqrt[n]{n})^n} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\sqrt[n]{8}\cdot 2}{3+\sqrt[n]{n}} \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{1}{2} < 1 \quad \mathbf{(1p)}$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)** .

b) Legyen $b_n := (-1)^n \dfrac{n+2}{n+3} \quad (n \in \mathbb{N})$. Ekkor $|b_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ **(2p)** , így a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-oz **(3p)** , tehát $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ divergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := (-1)^n \dfrac{2^{n+1}}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})$.
Első megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2}{n+1} \underset{(\mathbf{1p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0 < 1 \quad \mathbf{(1p)}$$

azaz a hányadoskritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ numerikus sor abszolút konvergens **(1p)** , tehát konvergens **(1p)** .
Második megoldás. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ alternál **(1p)** , $c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ **(1p)** , továbbá minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2}{n+1} \leq 1 \quad \mathbf{(1p)},$$

azaz $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ tágabb értelemben vett Leibniz-sor, tehát konvergens **(1p)** .
(Az a megoldás is maximális pontot ér, amelyben a hallgató észreveszi, hogy egy nevezetes sorról van szó, amelynek összege $\frac{2}{e^2}$.)

5. feladat (7+12=19 pont)
a) Milyen sorokat nevezünk Leibniz-típusú soroknak? Mit mond ki a Leibniz-kritérium? Hogyan becsülhetjük egy Leibniz-sor hibáját? (Bizonyítás nélkül mondja ki a tanult állításokat!)
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét az $S_{99} := \sum_{n=0}^{99}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$ részletösszeggel közelítjük.

Mo. *a*) *Lebiniz-sor definíciója:* Azt mondjuk, hogy az $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor **Leibniz-sor**, ha a következő tulajdonságok teljesülnek rá.

(i) Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $a_{n+1}\cdot a_n \leq 0$ (azaz **alternál**). **(1p)**

(ii) Az $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton csökkenő. **(1p)**

(iii) $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$. **(1p)**

(Ha az első két tulajdonság egy küszöbindextől kezdve teljesül, akkor $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$-et **tágabb értelemben vett Leibniz-sornak** nevezzük.)

Leibniz-kritérium: Minden (tágabb értelemben vett) Leibniz-sor konvergens. **(2p)**
Ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ Leibniz-sor, és $S\in\mathbb{R}$ jelöli a sor összegét, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - S\right| \leq |a_{n+1}| \quad \textbf{(2p)}.$$

b) Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$. Ekkor $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ alternál **(1p)** , $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ **(2p)** , illetve $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenő **(1p)** , hiszen egy monoton növő, pozitív tagú sorozat reciproka **(3p)** , tehát a Leibniz-kritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(2p)** .
Hibabecslés: Szintén a Leibniz-kritérium alapján, ha S jelöli a sor összegét, akkor

$$|S_{99} - S| \leq |a_{100}| = \frac{1}{\sqrt{10301}} \quad \textbf{(3p)}$$
