**1. feladat (18 pont)**
Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{x^2+1}{ye^y}$$

---

*Mo.* Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2+1}{ye^y} \quad \Longrightarrow \quad \int ye^y \,\mathrm{d}y = \int x^2+1 \,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}).$$

Az egyenlőség bal oldala (parciális integrálással):

$$\int ye^y \,\mathrm{d}y \overset{(\mathbf{5p})}{=} ye^y - \int e^y \,\mathrm{d}y \overset{(\mathbf{3p})}{=} ye^y - e^y + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}).$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int x^2+1 \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{6p})$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$y(x)e^{y(x)} - e^{y(x)} = \frac{x^3}{3} + x + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

**2. feladat (21 pont)**
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$xy' - 2y = 2x \quad (x \neq 0), \qquad y(2) = 0$$

---

*Mo.* Átalakítva:

$$y' - \frac{2}{x}y = 2 \quad (\mathbf{2p})$$

Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{h,\text{á}}(x) = Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{7p}).$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)x^2$ alakban (ahol $c$ egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)x^2 - 2c(x)x}_{y'(x)} + \underbrace{2c(x)x}_{\frac{2}{x}y(x)} = 2 \quad (\mathbf{2p}).$$

Ebből pedig $c'(x) = \frac{2}{x^2}$.

$$\int \frac{2}{x^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{2}{x} + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := -\frac{2}{x}$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)x^2 = -2x \quad (\mathbf{1p}).$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,\text{á}}(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,\text{á}}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} -2x + Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}).$$

Jelölje $\widetilde{y}$ a kezdeti feltételt kielégítő megoldást. $\tilde{y}(2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 1$ **(1p)** , azaz

$$\tilde{y}(x) = 2x + x^2 \quad (\mathbf{1p}) \quad (x \in \mathbb{R}^+) \quad (\mathbf{1p}).$$

(Alternatív megoldás: $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ helyettesítéssel...)

---

**3. feladat (21 pont)**
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' - 2y' + y = 8e^{-x} + 5x$$

---

*Mo.* Másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = 1$, **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = Ae^{-x} + Bx + C \quad (x \in \mathbb{R}, A, B, C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p})$$

alakban keressük (nincs rezonancia). Deriválva kétszer **(2p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{-x} + Bx + C && \cdot 1 \\ y'(x) &= -Ae^{-x} + B && | \cdot (-2) \\ y''(x) &= Ae^{-x} && | \cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 4Ae^{-x} + Bx + C - 2B = 8e^{-x} + 5x \quad (\mathbf{2p})$$

$$\Longrightarrow \quad A = 2,\, B = 5,\, C = 10 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = 2xe^{-x} + 5x + 10 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= 2xe^{-x} + 5x + 10 + C_1 e^x + C_2 x e^x \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}). \end{aligned}$$

---

**4. feladat (8+8+8=24 pont)**
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{(n+1)^2}{(2n)!} \qquad b) \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-n} \left( \frac{n+3}{n+2} \right)^n \qquad c) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2n^2 + 2n + 1}{n^3 + 5n^2 + 3}$$

---

*Mo.* *a)* Legyen $a_n := \frac{(n+1)^2}{n!}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{(n+2)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)^2} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{(n+2)^2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

azaz a hányadoskritérium alapján a $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^+} a_n$ sor konvergens **(2p)** .

*b)* Legyen $b_n := e^{-n} \left( \frac{n+3}{n+2} \right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$\sqrt[n]{b_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{e} \cdot \frac{n+3}{n+2} \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{1}{e} < 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)** .

*c*) Legyen $c_n := \frac{2n^2+2n+1}{n^3+5n^2+3} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$c_n \geq \frac{2n^2}{9n^3} = \frac{2}{9n} \quad \textbf{(4p)}$$

és a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{9n}$ sor divergens **(2p)** , tehát a minoráns kritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ divergens **(2p)** .

---

**5. feladat (6+10=16 pont)**
*a*) Mit mond ki az integrálkritérium?
*b*) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \frac{1}{2n\ln^2(n)}$$

numerikus sor?

---

*Mo.* *a*) Legyen $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ monoton csökkenő függvény **(2p)** . Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty. \qquad \textbf{(4p)}$$

*b*) Legyen

$$f(x) := \frac{1}{2x\ln^2(x)} \quad (x \geq 2) \quad \textbf{(2p)}.$$

Ekkor $f$ nemnegatív, monoton csökkenő **(2p)** .

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \int_2^{b} \frac{1}{x}(\ln(x))^{-2}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_{x=2}^{b} \overset{\textbf{(1p)}}{=}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)}\right) \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{2}{\ln(2)} < +\infty$$

tehát az integrálkritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} f(n)$ konvergens **(1p)** .

---