1. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi hatványsor konvergenciasugarát!

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k!}{k^k} x^k$$

Mo. Legyen $a_k := \frac{k!}{k^k}$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{k!} \overset{(\mathbf{6p})}{=} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \underset{(\mathbf{4p})}{\xrightarrow{k\to\infty}} \frac{1}{e},$$

azaz a hatványsor konvergenciasugara e **(2p)** .

---

2. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény 0 középpontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát!

$$f(x) := e^{2x}\,\mathrm{sh}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Mo. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} e^{2x}\frac{e^x - e^{-x}}{2} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{1}{2}(e^{3x} - e^x) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right) \overset{(\mathbf{4p})}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k - 1}{2\cdot k!}x^k,$$

tehát a Taylor-sor konvergenciasugara $+\infty$ **(2p)** .

---

3. feladat (14 pont)
Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \cos(2x^2)\,\mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékét az integrandus 0 középpontú hatodfokú Taylor-polinomjának integrálja segítségével!

Mo. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) := \cos(2x^2) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{4^k x^{4k}}{(2k)!} \quad (\mathbf{4p}),$$

tehát (mivel az n-edrendű Taylor polinom a Taylor-sor n-edik részletösszege) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$T^f_{0,6}(x) = 1 - \frac{4x^4}{2!} = 1 - 2x^4 \quad (\mathbf{6p}),$$

tehát

$$\int\limits_0^1 \cos(2x^2)\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_0^1 T^f_{0,6}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 1 - 2x^4\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left[x - \frac{2x^5}{5}\right]_{x=0}^1 \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{3}{5}.$$

---

4. feladat (10 pont)
Számítsuk ki az alábbi határértéket (amennyiben létezik)!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\mathrm{ch}\,(x^2y)} \cdot \mathrm{arctg}\left(x^2 + 2y^3\right)$$

Mo. Az

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}\,(x^2y)} \cdot \mathrm{arctg}\left(x^2 + 2y^3\right)$$

függvény értelmezve van az origóban **(2p)** , és ott folytonos **(2p)** , tehát

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\mathrm{ch}\,(x^2y)} \cdot \mathrm{arctg}\left(x^2 + 2y^3\right) \overset{(\mathbf{4p})}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\mathrm{ch}\,(0)} \cdot \mathrm{arctg}\,(0) \overset{(\mathbf{2p})}{=} 1 \cdot 0 = 0$$

---

5. feladat (10+8+10+4=32 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} - 2x + 2y & , \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & , \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mikor mondjuk, hogy egy $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény totálisan differenciálható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban? Adjunk meg két szükséges feltételt pontbeli differenciálhatóságra!

b) Folytonos-e az f függvény? (Indokoljunk!)

c) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait $\mathbb{R}^2$ minden pontjában!

d) A sík mely pontjaiban differenciálható f? (Indokoljunk!)

Mo. a) *Definíció:* Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható $\underline{a}$-ban, ha $\underline{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek **(2p)** , és létezik olyan $\underline{A} \in \mathbb{R}^n$, amelyre teljesül, hogy

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \underline{A}, \underline{x} - \underline{a}\rangle}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0 \quad (\mathbf{3p}).$$

(A jegyzetben szereplő definíció is maximális pontot ér.)

Szükséges feltételek pontbeli differenciálhatóságra: Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ekkor

(i) f folytonos $\underline{a}$-ban **(2p)** ,

(ii) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén létezik f-nek az i-edik változó szerinti parciális deriváltja $\underline{a}$-ban és

$$\mathrm{grad} f(\underline{a}) = (\partial_1 f(\underline{a}), \dots, \partial_n f(\underline{a})) \quad (\mathbf{3p})$$

b) Nem, mert az origóban nem folytonos **(2p)** , ugyanis

$$\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0) \qquad \text{és} \qquad f\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) \overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{2}{k^4}} - \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \overset{(\mathbf{2p})}{\neq} 0 = f(0,0)$$

c) Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^4) - 2x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} - 2 \quad (\mathbf{2p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^4) - 4xy^5}{(x^2+y^4)^2} + 2 \quad (\mathbf{2p})$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni **(1p)** :

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x} = -2 \quad (\mathbf{2p})$$
$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{2y}{y} = 2 \quad (\mathbf{2p}).$$

d) Az origóban nem differenciálható f, mert ott nem folytonos **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (nyílt) halmazon **(2p)** .

---

6. feladat (16 pont)

Legyen H az $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$ és $y = x^2$ egyenletű alakzatok által határolt korlátos halmaz.

$$\int_H 2x \,\mathrm{d}(x,y) = ?$$

Mo. Legyen a feladatbeli halmaz H, ekkor

$$H = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{2} \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\} \quad (\mathbf{3p})$$

H normáltartomány az integrandus pedig folytonos **(2p)** , tehát

$$\int\limits_H 2x \, \mathrm{d}(x,y) \overset{(\mathbf{4p})}{=} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \int\limits_{x^2}^{\frac{1}{x}} 2x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} 2x \left(\frac{1}{x} - x^2 \right) \mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} 2 - 2x^3 \, \mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=}$$

$$= \left[2x - \frac{x^4}{2} \right]_{x=\frac{1}{2}}^{1} = 2 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{32} = \frac{17}{32} \quad (\mathbf{2p})$$
